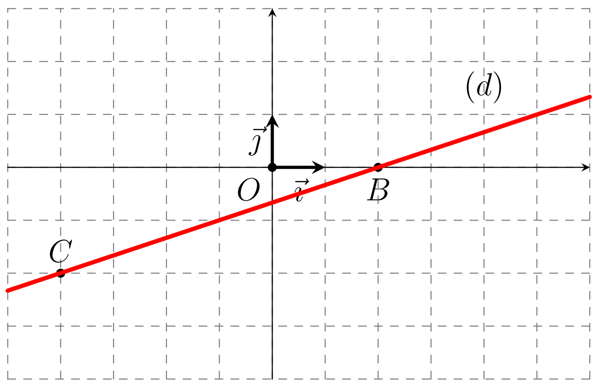
Dans un repère orthonormé, on considère le point $A(-3;5)$ et la droite (d) dont une équation cartésienne est $-x+3y+2=0$.

Question 1

Avec l'équation de droite, on vérifie que les points $B(2;0)$ et $C(-4;-2)$ appartenant à la droite (d).



Question 2

Un vecteur directeur de la droite (d) a pour coordonnées $\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$, donc un vecteur normal est par exemple $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$.

Question 3

Si δ est la perpendiculaire à (d) passant par A, on a :

$$M(x;y)\in\delta \iff \overrightarrow{AM} \text{ et } \vec{n} \text{ sont colinéaires, soit } -3(x+3)=1(y-5).$$

Cela donne l'équation :

$$3x-y+14=0.$$

Question 4

Le projeté orthogonal de A sur la droite (d) est le point commun de (d) et δ. On résout le système d'équations :

$$\begin{cases}-x+3y+2=0\\3x-y+14=0\end{cases}$$

Cela donne :

$$\begin{aligned}x&=3y+2\\3(3y+2)-y+14&=0\\9y+6-y+14&=0\\8y&=-20\\y&=-\frac{5}{2}.\end{aligned}$$

On trouve $x = 3y + 2 = 3 \times \left(-\dfrac{5}{2}\right) + 2 = -\dfrac{11}{2}$.

Le projeté orthogonal est donc le point $H\left(-\dfrac{11}{2}, -\dfrac{5}{2}\right)$.

Question 5

La distance entre le point A et la droite (d) est égale à AH. On calcule :

$$\begin{aligned} AH^2 &= \left(-\frac{11}{2} + 3\right)^2 + \left(-\frac{5}{2} - 5\right)^2 \\ &= \left(-\frac{5}{2}\right)^2 + \left(-\frac{15}{2}\right)^2 \\ &= \frac{25}{4} + \frac{225}{4} \\ &= \frac{250}{4}, \quad \text{d'où} \quad AH = \frac{\sqrt{250}}{2}. \end{aligned}$$