Exercice Première Spécialité - 2020 - Ex 3 : Exponentielle et Dérivation

Dérivation Exponentielle

1.

On a : $f(4) = 4 \times \mathrm{e}^{-0,5\times 4} = 4 \times \mathrm{e}^{-2} = \dfrac{4}{\mathrm{e}^2}$.

2.

f est un produit de fonctions dérivables sur $[0\,;\,+\infty[$, donc sur cet intervalle :

$$f'(t) = \mathrm{e}^{-0,5t} - 0,5t\mathrm{e}^{-0,5t} = \mathrm{e}^{-0,5t}(1 - 0,5t).$$

3.

On sait que, quel que soit le réel t, $\mathrm{e}^{-0,5t} > 0$, donc $f'(t)$ a le signe de $1 - 0,5t$:

$$\begin{aligned} & 1 - 0,5t > 0 \\ \iff & 1 > 0,5t \\ \iff & 2 > t \\ \iff & t < 2 \end{aligned}$$

4.

On en déduit que la fonction est croissante sur $[0\,;\,2]$ de $f(0) = 0$ à $f(2) = 2\mathrm{e}^{-1}$, puis décroissante sur $[2\,;\,+\infty[$ de $f(2)$ à zéro.

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$2\mathrm{e}^{-1}$	$\searrow$	

5.

La question précédente montre que $f(2) = 2\mathrm{e}^{-1}$ est le maximum de la fonction sur $[0\,;\,+\infty[$.
$f(2) = 2\mathrm{e}^{-1} \approx 0,736$, soit environ 0,74, ce que confirme le graphique.