Exercice 4 (5 points)

1. Étudier le signe de la fonction P définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = x^2 + 4x + 3$.

$$P(x) = x^2 + 4x + 3 = (x+2)^2 - 4 + 3 = (x+2)^2 - 1 = (x+3)(x+1).$$

On sait que $P(x) > 0$, sauf sur lintervalle $]-3, -1[$ (-3 et -1 étant les racines du trinôme).

2. Montrer que pour tout réel x de lintervalle $]-2, +\infty[$,

$$f'(x) = \frac{P(x)}{(x+2)^2},$$

où f' est la fonction dérivée de f.

Pour $x > -2$, f est dérivable et sur $]-2, +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{(2x+1)(x+2) - (x^2+x-1)}{(x+2)^2} = \frac{2x^2 + 4x + x + 2 - x^2 - x + 1}{(x+2)^2} = \frac{x^2+4x+3}{(x+2)^2} = \frac{P(x)}{(x+2)^2}.$$

3. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $]-2, +\infty[$ et construire le tableau de variations de la fonction f sur $]-2, +\infty[$.

Comme $(x+2)^2 > 0$ sur $]-2, +\infty[$, le signe de $f'(x)$ est celui du numérateur $P(x)$ étudié à la question 1. Donc sur $]-2, -1[$, $f'(x) < 0$: la fonction est décroissante et sur $]-1, +\infty[$ la fonction f est croissante.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	-1	$\nearrow$	

4. Donner le minimum de la fonction f sur $]-2, +\infty[$ et la valeur pour laquelle il est atteint (on donnera les valeurs exactes).

Daprès la question précédente $f(-1) = \dfrac{1-1-1}{-1+2} = -1$ est le minimum de la fonction f sur $]-2, +\infty[$.

5. Déterminer le coefficient directeur de la tangente T à la courbe C_f au point dabscisse 2.

Le coefficient directeur de la tangente T à la courbe C_f au point dabscisse 2 est le nombre dérivé $f'(2)$:

$$f'(2) = \frac{4+8+3}{(2+2)^2} = \frac{15}{16} = 0,9375.$$