

Exercice 4 (5 points)

1. Étudier le signe de la fonction P définie sur \mathbb{R} par $P(x) = x^2 + 4x + 3$.

$$P(x) = x^2 + 4x + 3 = (x + 2)^2 - 4 + 3 = (x + 2)^2 - 1 = (x + 3)(x + 1).$$

On sait que $P(x) > 0$, sauf sur l'intervalle $] -3, -1[$ (-3 et -1 étant les racines du trinôme).

2. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $] -2, +\infty[$,

$$f'(x) = \frac{P(x)}{(x + 2)^2},$$

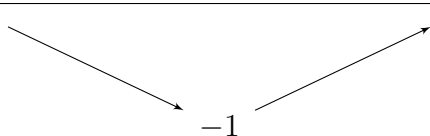
où f' est la fonction dérivée de f .

Pour $x > -2$, f est dérivable et sur $] -2, +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{(2x + 1)(x + 2) - (x^2 + x - 1)}{(x + 2)^2} = \frac{2x^2 + 4x + x + 2 - x^2 - x + 1}{(x + 2)^2} = \frac{x^2 + 4x + 3}{(x + 2)^2} = \frac{P(x)}{(x + 2)^2}.$$

3. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $] -2, +\infty[$ et construire le tableau de variations de la fonction f sur $] -2, +\infty[$.

Comme $(x + 2)^2 > 0$ sur $] -2, +\infty[$, le signe de $f'(x)$ est celui du numérateur $P(x)$ étudié à la question 1. Donc sur $] -2, -1[$, $f'(x) < 0$: la fonction est décroissante et sur $] -1, +\infty[$ la fonction f est croissante.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$			

4. Donner le minimum de la fonction f sur $] -2, +\infty[$ et la valeur pour laquelle il est atteint (on donnera les valeurs exactes).

D'après la question précédente $f(-1) = \frac{1 - 1 - 1}{-1 + 2} = -1$ est le minimum de la fonction f sur $] -2, +\infty[$.

5. Déterminer le coefficient directeur de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse 2.

Le coefficient directeur de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse 2 est le nombre dérivé $f'(2)$:

$$f'(2) = \frac{4 + 8 + 3}{(2 + 2)^2} = \frac{15}{16} = 0,9375.$$