Exercice 2 (5 points)

1. Quelle est la valeur de u_3 ?

On a $u_3 = 18$.

2. On admet que la suite (u_n) est arithmétique de raison 6. Exprimer u_n en fonction de n.

On a $u_n = 6n$.

3. Combien lartisan a-t-il ajouté de carreaux pour faire létape 5 ?

Avec $u_4 = 6 \times 4 = 24$ et $u_5 = 6 \times 5 = 30$, on a donc ajouté $30 - 24 = 6$ carreaux pour faire létape 5.

4. Combien a-t-il alors posé de carreaux au total lorsquil termine létape 5 (en comptant le carreau central initial) ?

Il a posé en tout :

$$1 + 6 + 12 + 18 + 24 + 30 = 91 \text{ carreaux}$$

5. On pose $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$. Montrer que $S_n = 6(1 + 2 + 3 + \cdots + n)$ puis que $S_n = 3n^2 + 3n$.

$$S_n = 6 \times (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots + n)$$

Or

$$T_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$$

On peut écrire

$$T_n = n + (n-1) + \cdots + 3 + 2 + 1$$

En sommant membre à membre :

$$2T_n = (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1) = n(n+1)$$

Donc

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

et par suite

$$S_n = 6 \times \frac{n(n+1)}{2} = 3n(n+1) = 3n^2 + 3n$$

6. Si on compte le premier carreau central, le nombre total de carreaux posés par lartisan depuis le début, lorsquil termine la n-ième étape, est donc $3n^2 + 3n + 1$.

À la fin de sa semaine, lartisan termine la pose du carrelage en collant son 2977ème carreau. Combien a-t-il fait détapes ?

On a donc $3n^2 + 3n + 1 = 2977$. Il faut donc résoudre dans $\mathbb{N}$ léquation :

$$3n^2 + 3n - 2976 = 0$$

ou en simplifiant par 3 :

$$n^2 + n - 992 = 0$$

On a

$$\Delta = 1 + 4 \times 992 = 1 + 3968 = 3969 = 63^2$$

Les solutions sont donc

$$n_1 = \frac{-1+63}{2} = 31 \quad \text{et} \quad n_2 = \frac{-1-63}{2} = -32$$

On ne retient que la solution 31. Lartisan a donc fait 31 étapes.