

Exercice 2 (5 points)

Partie A

1. Déterminer une forme explicite de la suite (u_n)

On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 25000 \times 0,94^n$.

2. Calculer la somme des sept premiers termes de la suite (u_n)

Avec $S_7 = u_0 + u_1 + \dots + u_6$,

$$0,94S_7 = u_1 + u_2 + \dots + u_7,$$

doù par différence : $0,06S_7 = u_0 - u_7 = 25000 - 25000 \times 0,94^7$,

$$\text{doù } S_7 = 25000 \times \frac{1 - 0,94^7}{0,06} \approx 25000 \times \frac{0,351522}{0,06} \approx 146468$$

3. Comparer les termes u_0 et v_0 puis u_{20} et v_{20}

- $u_0 = 25000$ et $v_0 = 50 \times 104 = 5200$: $u_0 > v_0$
- $u_{20} = 25000 \times 0,94^{20} \approx 7252,66$
et $v_{20} = 50 \times (104 + 25 \times 20) = 50 \times 604 = 30200$;
 $u_{20} < v_{20}$

4. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $u_n < v_n$

Il faut résoudre dans \mathbb{N} l'inéquation : $25000 \times 0,94^n < 50(104 + 25n)$.

On a $u_8 = 15239,2$ et $v_8 = 50 \times (104 + 25 \times 8) = 15200$

$u_9 = 14324,9$ et $v_9 = 50(104 + 25 \times 9) = 16450$

9 est donc la solution.

Partie B

u_n et v_n représentent les nombres de voitures respectivement diesel et essence vendues à partir de 1995.

Dès lors que le résultat précédent en $1995 + 9 = 2004$, le nombre de véhicules diesel vendus sera inférieur à celui des véhicules essence.