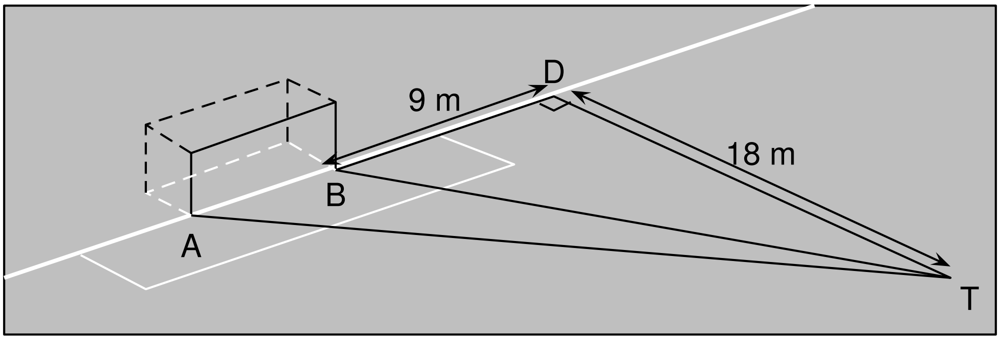
Exercice 4 (5 points)



1.

Les droites (TD) et (AB) sont perpendiculaires, les vecteurs $\overrightarrow{TD}$ et $\overrightarrow{DB}$ sont donc orthogonaux : leur produit scalaire est donc nul.

2.

Daprès la relation de Chasles : $\overrightarrow{TA}\cdot\overrightarrow{TB}=(\overrightarrow{TD}+\overrightarrow{DA})\cdot\overrightarrow{TB}=\overrightarrow{TD}\cdot\overrightarrow{TB}+\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{TB}$.

Or $\overrightarrow{TD}\cdot\overrightarrow{TB}=\overrightarrow{TD}\cdot\overrightarrow{TD}=TD^2=324$.

Dautre part $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{TB}=\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}=(7,32+9)\times 9=146,88$.

Finalement :

$$\overrightarrow{TA}\cdot\overrightarrow{TB}=324+146,88=470,88$$

3. Méthode 1:

On sait que $\overrightarrow{TA}\cdot\overrightarrow{TB}=TA\times TB\times\cos(\widehat{ATB})\quad(1)$.

Or daprès le théorème de Pythagore appliqué au triangle TDB rectangle en D, on a :

$$AT^2=AD^2+TD^2=16,322+182=590,3424.$$

Légalité (1) sécrit donc :

$$470,88=\sqrt{405}\times\sqrt{590,3424}\times\cos(\widehat{ATB}),\ \text{doù}\ \cos(\widehat{ATB})=\frac{470,88}{\sqrt{405}\times\sqrt{590,3424}}\approx 0,96301.$$

La calculatrice donne $\widehat{ATB}\approx 15,63°$, soit $\widehat{ATB}\approx 15,6°$ au dixième près.

3. Méthode 2:

Dans le triangle ATD rectangle en D :

$\tan(\widehat{ATD})=\frac{AD}{TD}=\frac{9+7,32}{18}\approx 0,90667$, doù $\widehat{ATD}\approx 42,1975°$.

Dans le triangle BTD rectangle en D :

$\tan(\widehat{BTD})=\frac{BD}{TD}=\frac{9}{18}=\frac{1}{2}$, doù $\widehat{BTD}\approx 26,5651°$.

On a donc par différence $\widehat{ATB}\approx 42,1975°-26,5651°\approx 15,6324°$ soit $15,6°$ au dixième près.