

## Exercice 4 (5 points)

1. On note  $f'$  la fonction dérivée de  $f$ .

a. Montrer que, pour tout réel  $x$ ,  $f'(x) = 3 \left( x + \frac{1}{3} \right) (x - 1)$ .

La fonction polynôme  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et donc sur  $[0; +\infty[$  :

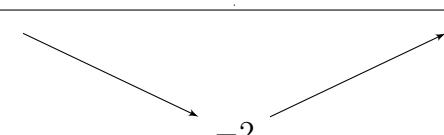
$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 3x^2 - 2x - 1 \\
 &= 3(x^2 - \frac{2}{3}x) - 1 \\
 &= 3 \left[ \left( x - \frac{1}{3} \right)^2 - \frac{1}{9} \right] - 1 \\
 &= 3 \left[ \left( x - \frac{1}{3} \right)^2 - \frac{4}{9} \right] \\
 &= 3 \left( x + \frac{1}{3} \right) (x - 1)
 \end{aligned}$$

On pouvait aussi développer l'expression proposée dans l'énoncé et prouver qu'elle est bien égale à la dérivée obtenue sous forme développée.

b. En déduire le tableau de variation de  $f$  sur  $[0; +\infty[$ .

Comme pour  $x > 0$ ,  $3 \left( x + \frac{1}{3} \right) > 0$ , le signe de  $f'(x)$  est celui de  $x - 1$ , donc :

- Si  $0 \leq x < 1$ ,  $f'(x) < 0$  : la fonction est décroissante sur  $[0; 1[$  ;
- Si  $x > 1$ ,  $f'(x) > 0$  : la fonction est croissante sur  $[1; +\infty[$  ;
- $f(1) = 1 - 1 - 1 - 1 = -2$  est le minimum de la fonction sur  $[0; +\infty[$ .

$x$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$		-2	

c. Déterminer l'abscisse du point de la courbe représentative de  $f$  pour lequel le coefficient directeur de la tangente vaut 7.

Il faut trouver le nombre réel  $x$  de  $[0; +\infty[$  tel que :

$$f'(x) = 7 \iff 3x^2 - 2x - 1 = 7 \iff 3x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$\Delta = 4 + 4 \times 3 \times 8 = 4 + 96 = 100 = 10^2 > 0$$

Cette équation a deux solutions :

$$x_1 = \frac{2 + 10}{6} = 2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{2 - 10}{6} = -\frac{4}{3}$$

Seule la première solution est positive, donc  $f'(2) = 7$ .

**2. On note  $x_0$  l'unique solution de l'équation  $f(x) = 0$ . On admet que  $x_0 \in [1; 2]$ .**

**a. On considère la fonction suivante définie en langage Python.**

Itération	$x = \frac{a + b}{2}$	$f(x) < 0$ ?	$a$	$b$	Amplitude de $[a ; b]$
$k = 0$	1,5	OUI	1,5	2	0,5
$k = 1$	1,75	OUI	1,75	2	0,25
$k = 2$	1,875	NON	1,75	1,875	0,125

**b. En déduire un encadrement de  $x_0$ , d'amplitude 0,125, par deux nombres décimaux.**

On a donc  $1,75 < x_0 < 1,875$ .