Exercice 4 (5 points)

1. On note f' la fonction dérivée de f.

a. Montrer que, pour tout réel x, $f'(x) = 3\left(x + \dfrac{1}{3}\right)(x-1)$.

La fonction polynôme f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donc sur $[0; +\infty[$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 2x - 1 \\ &= 3(x^2 - \frac{2}{3}x) - 1 \\ &= 3\left[\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{9}\right] - 1 \\ &= 3\left[\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{4}{9}\right] \\ &= 3\left(x + \frac{1}{3}\right)(x-1) \end{aligned}$$

On pouvait aussi développer l'expression proposée dans l'énoncé et prouver qu'elle est bien égale à la dérivée obtenue sous forme développée.

b. En déduire le tableau de variation de f sur $[0; +\infty[$.

Comme pour $x > 0$, $3\left(x + \dfrac{1}{3}\right) > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui de $x - 1$, donc :

- Si $0 \leq x < 1$, $f'(x) < 0$: la fonction est décroissante sur $[0; 1[$;
- Si $x > 1$, $f'(x) > 0$: la fonction est croissante sur $[1; +\infty[$;
- $f(1) = 1 - 1 - 1 - 1 = -2$ est le minimum de la fonction sur $[0; +\infty[$.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	-2	$\nearrow$	

c. Déterminer labscisse du point de la courbe représentative de f pour lequel le coefficient directeur de la tangente vaut 7.

Il faut trouver le nombre réel x de $[0; +\infty[$ tel que :

$$f'(x) = 7 \iff 3x^2 - 2x - 1 = 7 \iff 3x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$\Delta = 4 + 4 \times 3 \times 8 = 4 + 96 = 100 = 10^2 > 0$$

Cette équation a deux solutions :

$$x_1 = \frac{2+10}{6} = 2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{2-10}{6} = -\frac{4}{3}$$

Seule la première solution est positive, donc $f'(2) = 7$.

2. On note x_0 lunique solution de léquation $f(x) = 0$. On admet que $x_0 \in [1; 2]$.

a. On considère la fonction suivante définie en langage Python.

Itération	$x = \dfrac{a+b}{2}$	$f(x) < 0$?	a	b	Amplitude de $[a\ ;\ b]$
$k = 0$	1,5	OUI	1,5	2	0,5
$k = 1$	1,75	OUI	1,75	2	0,25
$k = 2$	1,875	NON	1,75	1,875	0,125

b. En déduire un encadrement de x_0, damplitude 0,125, par deux nombres décimaux.

On a donc $1,75 < x_0 < 1,875$.