1.

On a :

$$\begin{aligned} & M(x\,;\,y) \in \mathcal{C} \\ \iff & AM^2 = 5^2 \\ \iff & (x-2)^2 + (y-5)^2 = 25 \\ \iff & x^2 - 4x + 4 + y^2 - 10y + 25 = 25 \\ \iff & x^2 + y^2 - 4x - 10y = -4. \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} & B(5\,;\,9) \in \mathcal{C} \\ \iff & 5^2 + 9^2 - 4 \times 5 - 10 \times 9 = -4 \\ \iff & 25 + 81 - 20 - 90 = -4 \\ \iff & 106 - 110 = -4, \end{aligned}$$

qui est vrai.

3.

A est le centre du cercle et B est un point de ce cercle. On sait que la tangente en un point du cercle est perpendiculaire au rayon contenant ce point B.

4.

Si $\mathcal{T}_B$ est cette tangente, on a :

$$M(x\,;\,y) \in \mathcal{T}_B \iff (\overrightarrow{BM}) \perp (\overrightarrow{AB}) \iff \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{AB}.$$

Avec $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix} x-5 \\ y-9 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, on a donc :

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ \iff & 3(x-5) + 4(y-9) = 0 \\ \iff & 3x + 4y - 15 - 36 = 0 \\ \iff & 3x + 4y - 51 = 0. \end{aligned}$$

5.

Un point de l'axe des ordonnées est caractérisé par son abscisse nulle ($x = 0$), donc :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 10y = -4 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow y^2 - 10y = -4 \iff y^2 - 10y + 4 = 0.$$

COOP MATHS CC BY SA

MathALÉA

Pour cette équation :

$$\Delta = 100 - 4 \times 4 = 84 = 4 \times 21 = (2\sqrt{21})^2 > 0,$$

il y a donc deux racines :

$$y_1 = \frac{10 + 2\sqrt{21}}{2} = 5 + \sqrt{21} \quad \text{et} \quad y_2 = \frac{10 - 2\sqrt{21}}{2} = 5 - \sqrt{21}.$$

Le cercle $\mathcal{C}$ a deux points communs avec l'axe des ordonnées de coordonnées :

$$(5 + \sqrt{21}\,;\,0) \quad \text{et} \quad (5 - \sqrt{21}\,;\,0).$$

🚀 Retrouve des milliers d'exercices corrigés sur galilee.ac

COOP MATHS cc BY SA

MathALÉA