1.

a. Avec $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, on a :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -2 \times 1 + 4 \times 2 = -2 + 8 = 6.$$

b. On a :

$$\|\overrightarrow{AB}\|^2 = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = 4 + 16 = 20, \text{ d'où } \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = 2\sqrt{5},$$
$$\|\overrightarrow{AC}\|^2 = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} = 1 + 4 = 5, \text{ d'où } \|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{5}.$$

c. On peut également écrire le produit scalaire :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos(\widehat{BAC}),$$

soit :

$$6 = 2\sqrt{5} \times \sqrt{5} \times \cos(\widehat{BAC}) \iff \cos(\widehat{BAC}) = \frac{6}{2\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} = 0{,}6.$$

La calculatrice donne $\widehat{BAC} \approx 53{,}1°$, soit $53°$ au degré près.

2.

a. Une équation de la droite (AB) étant $y = ax + b$, alors on a le système :

$$\begin{cases} -1 = 2a + b \\ 3 = 0 \times a + b \end{cases}$$

d'où $b = 3$ et, par substitution, on obtient $-1 = 2a + 3$ ou $a = -2$.
Donc :

$$\begin{aligned} & M(x\,;\,y) \in (AB) \\ \iff & y = -2x + 3 \\ \iff & 2x + y - 3 = 0. \end{aligned}$$

b. Si $H(x\,;\,y)$, on a $\overrightarrow{CH} \begin{pmatrix} x - 3 \\ y - 1 \end{pmatrix}$, et les coordonnées vérifient :

$$\begin{aligned} & \begin{cases} H \in (AB) \\ \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ -2(x - 3) + 4(y - 1) = 0 \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ -2x + 6 + 4y - 4 = 0 \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ -2x + 4y + 2 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Ce qui donne par résolution :

$$5y - 1 = 0 \iff y = \frac{1}{5},$$

et :

$$\begin{aligned} & 2x + \frac{1}{5} - 3 = 0 \\ \iff & 2x - \frac{14}{5} = 0 \\ \iff & 2x = \frac{14}{5} \\ \iff & x = \frac{7}{5}. \end{aligned}$$

Le point H a donc pour coordonnées $H\left(\frac{7}{5}\,;\,\frac{1}{5}\right)$.