Exercice 2 (5 points)

1. Le triangle ABC est-il isocèle en B ?

On a $BA^2 = (1-(-1))^2 + (2-(-3))^2 = 4 + 25 = 29$; $BC^2 = (7-1)^2 + (1-2)^2 = 36 + 1 = 37$, donc $BA^2 \neq BC^2$: le triangle nest pas isocèle en B.

2. Déterminer la valeur arrondie au dixième de degré de langle $\widehat{BAC}$.

Par définition du produit scalaire :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$$

Avec $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}8\\4\end{pmatrix}$, $AB = \sqrt{29}$ et $AC = \sqrt{80}$, légalité devient :

$$16 + 20 = \sqrt{29} \times \sqrt{80} \times \cos(\widehat{BAC}) \quad \text{doù} \quad \cos(\widehat{BAC}) = \frac{36}{\sqrt{29 \times 80}}$$

La calculatrice donne $\widehat{BAC} \approx 41,6°$.

3. On considère le point H de coordonnées $(2,6;-1,2)$. Le point H est-il le projeté orthogonal du point B sur la droite (AC) ?

Le point H est le projeté orthogonal du point B sur la droite (AC) si :

- H appartient à la droite (AC) ;
- (BH) est perpendiculaire à (AC).

Or $\iff AH(3,6;1,8)$ et $\iff AC(8;4)$: manifestement ces vecteurs sont colinéaires : H appartient à la droite (AC).
De plus $\iff AC(8;4)$ et $\iff BH(1,6;-3,2)$, doù :

$$\iff AC\cdot \iff BH = 8 \times 1,8 - 4 \times 3,6 = 14,4 - 14,4 = 0$$

Les vecteurs sont orthogonaux, donc le point H est le projeté orthogonal du point B sur la droite (AC).