

1.

- a. L'aire du rectangle est $xy = 49$, d'où $y = \frac{49}{x}$, puisque $x \neq 0$.
Le périmètre du rectangle est :

$$p(x) = 2(x + y) = 2 \left(x + \frac{49}{x} \right).$$

- b. On a donc :

$$p(10) = 2 \left(10 + \frac{49}{10} \right) = 2(10 + 4,9) = 2 \times 14,9 = 29,8.$$

On a $p(x) = 2x + 2 \times \frac{49}{x} = 2x + \frac{98}{x} = f(x)$.

2.

On dérive f comme somme de fonctions dérivables :

$$f'(x) = 2 - \frac{98}{x^2} = \frac{2x^2 - 98}{x^2}.$$

3.

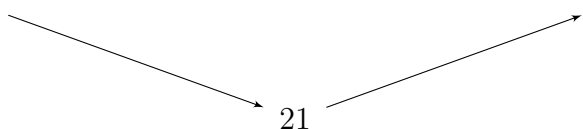
Comme $x > 0 \Rightarrow x^2 > 0$, on déduit que le signe de $f'(x)$ est celui de son numérateur.

$$\begin{aligned} 2x^2 - 98 &> 0 \\ \iff 2(x^2 - 49) &> 0 \\ \iff x^2 - 49 &> 0 \\ \iff (x - 7)(x + 7) &> 0. \end{aligned}$$

Le trinôme $x^2 - 49$ est positif sauf sur l'intervalle $] - 7 ; 7[$.

On en déduit que la fonction f est décroissante sur $]0 ; 7[$, puis croissante sur $]7 ; +\infty[$, avec un minimum en :

$$f(7) = 2 \times 7 + \frac{49}{7} = 14 + 7 = 21.$$

x	0	7	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	-	0	+
$f(x)$			

4.

Si $x = 7$, alors $y = \frac{49}{7} = 7$: parmi tous les rectangles d'aire donnée, celui qui a le plus petit périmètre est le carré.