Exercice Première Spécialité - 2020 - Ex 2 : Dérivation et Optimisation

Dérivation | Second degré

1.

a. L'aire du rectangle est $xy = 49$, d'où $y = \dfrac{49}{x}$, puisque $x \neq 0$.

Le périmètre du rectangle est :

$$p(x) = 2(x + y) = 2\left(x + \frac{49}{x}\right).$$

b. On a donc :

$$p(10) = 2\left(10 + \frac{49}{10}\right) = 2(10 + 4{,}9) = 2 \times 14{,}9 = 29{,}8.$$

On a $p(x) = 2x + 2 \times \dfrac{49}{x} = 2x + \dfrac{98}{x} = f(x)$.

2.

On dérive f comme somme de fonctions dérivables :

$$f'(x) = 2 - \frac{98}{x^2} = \frac{2x^2 - 98}{x^2}.$$

3.

Comme $x > 0 \Rightarrow x^2 > 0$, on déduit que le signe de $f'(x)$ est celui de son numérateur.

$$\begin{aligned} & 2x^2 - 98 > 0 \\ \iff & 2(x^2 - 49) > 0 \\ \iff & x^2 - 49 > 0 \\ \iff & (x - 7)(x + 7) > 0. \end{aligned}$$

Le trinôme $x^2 - 49$ est positif sauf sur l'intervalle $]-7\,;\,7[$.

On en déduit que la fonction f est décroissante sur $]0\,;\,7[$, puis croissante sur $]7\,;\,+\infty[$, avec un minimum en :

$$f(7) = 2 \times 7 + \frac{49}{7} = 14 + 7 = 21.$$

x	0		7		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	21	$\nearrow$	

4.

Si $x = 7$, alors $y = \dfrac{49}{7} = 7$: parmi tous les rectangles d'aire donnée, celui qui a le plus petit périmètre est le carré.