**1.**

On considère la fonction $f$ définie par :

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 1.$$

**a.**

On a :

$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 3(x^2 + 2x - 3).$$

**b.**

Le signe de $f'(x)$ est celui du trinôme $x^2 + 2x - 3$.
Pour celui-ci :

$$\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 4 + 12 = 16 = 4^2 > 0.$$

Le trinôme a donc deux racines :

$$x_1 = \frac{-2+4}{2} = 1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-2-4}{2} = -3.$$

On sait que ce trinôme est positif sauf sur l'intervalle $]-3; 1[$ où il est négatif.
Il en résulte que la fonction $f$ est croissante sauf sur l'intervalle $]-3; 1[$ où elle est décroissante.
Avec $f(-3) = 26$ et $f(1) = -6$, on a le tableau de variations :

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | | $\nearrow$ | $26$ | $\searrow$ | $-6$ | $\nearrow$ | |

**c.**

On sait qu'une équation réduite de la tangente à $C_f$ au point d'abscisse $-1$ est :

$$y - f(-1) = f'(-1)(x - (-1)).$$

Avec $f(-1) = 10$ et $f'(-1) = -12$, l'équation devient :

$$y - 10 = -12(x+1) \quad \Leftrightarrow \quad y = -12x - 12 + 10 \quad \Leftrightarrow \quad y = -12x - 2.$$

## 2.

### a.

La parabole a sa concavité tournée vers le haut : on a donc $a > 0$ (on rappelle que $a \neq 0$).

La parabole n'a pas de point commun avec l'axe des abscisses, donc le trinôme n'a pas de racines : $\Delta < 0$.

### b.

Un point est commun si et seulement si ses coordonnées vérifient les équations des deux courbes ; il faut donc résoudre l'équation :

$$x^3 + 3x^2 - 9x - 1 = 10x^2 + 8x + 8 \quad \text{ou} \quad x^3 - 7x^2 - 17x - 9 = 0.$$

Ceci n'est pas possible, mais sur la figure, on voit que les deux courbes ont un point commun d'abscisse $-1$ :

$$f(-1) = 10 \quad \text{et} \quad g(-1) = 10 - 8 + 8 = 10.$$

De plus, $f'(-1) = -12$ et comme $g'(x) = 20x + 8$, on a $g'(-1) = -20 + 8 = -12$.

Au point d'abscisse $-1$, les deux fonctions ont le même nombre dérivé, donc la même tangente.