$$f(x) = \frac{0{,}5x^3 - 3x^2 + x + 16}{x}.$$

1.

Il faut calculer :

$$\begin{aligned} f(2) &= \frac{0{,}5 \times 2^3 - 3 \times 2^2 + 2 + 16}{2} \\ &= \frac{4 - 12 + 2 + 16}{2} = \frac{10}{2} = 5 \text{ (milliers d'euros).} \end{aligned}$$

2.

f est le quotient de deux fonctions dérivables sur $[1\,;\,5]$, et comme la dérivée de $\frac{u}{v}$ est $\frac{u'v - uv'}{v^2}$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x\left(1{,}5x^2 - 6x + 1\right) - 1\left(0{,}5x^3 - 3x^2 + x + 16\right)}{x^2} \\ &= \frac{1{,}5x^3 - 0{,}5x^3 - 6x^2 + 3x^2 + x - x - 16}{x^2} \\ &= \frac{x^3 - 3x^2 - 16}{x^2}. \end{aligned}$$

3.

On a, quel que soit le réel x :

$$(x-4)(x^2+x+4) = x^3 + x^2 + 4x - 4x^2 - 4x - 16 = x^3 - 3x^2 - 16.$$

4.

D'après le résultat précédent :

$$f'(x) = \frac{(x-4)(x^2+x+4)}{x^2},$$

sur $[1\,;\,5]$.

Comme $x^2 > 0$, pour $1 \leqslant x \leqslant 5$, le signe de $f'(x)$ est celui du numérateur $(x-4)(x^2+x+4)$.

Le signe de $x - 4$ est aisé à trouver sur $[1\,;5]$;

Signe du trinôme $x^2 + x + 4$: on a $\Delta = 1^2 - 4 \times 4 = -16$.

Le trinôme n'a pas de racines, et il a le signe du coefficient de x^2, donc positif pour tout réel, donc en particulier sur $[1\,;5]$.

Finalement, le signe de $f'(x)$ est celui de $x - 4$.

D'où le tableau de variations avec :

$$f(1) = 0{,}5 - 3 + 1 + 16 = 14{,}5,$$

$$f(4) = \frac{32 - 48 + 4 + 16}{4} = 1 \quad \text{et} \quad f(5) = \frac{62{,}5 - 75 + 5 + 16}{5} = \frac{8{,}5}{5} = 1{,}7.$$

x	1		4		5
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$14{,}5$	$\searrow$	1	$\nearrow$	5

5.

D'après le tableau de variations précédent, le minimum de la fonction f est $f(4) = 1$.

Il faut donc produire 4 000 pièces pour avoir un coût minimum de 1 000 euros correspondant à cette production.