Exercice Première Spécialité - 2020 - Ex 4 : Dérivation et Optimisation du Bénéfice

Dérivation | Second degré

1.

Pour $x = 3$, lentreprise reçoit $R(3) = 3 \times 680 = 2040$ euros.
Le coût de production de ces 3 kilomètres de tissu est :

$$C(3) = 15 \times 3^3 - 120 \times 3^2 + 500 \times 3 + 750 = 405 - 1080 + 1500 + 750 = 1575.$$

Il y a donc un bénéfice de $R(3) - C(3) = 2040 - 1575 = 465$ euros.

2.

Pour $0 \leq x \leq 10$, on a :

$$B(x) = R(x) - C(x) = 680x - (15x^3 - 120x^2 + 500x + 750) = 680x - 15x^3 + 120x^2 - 500x - 750 = -15x^3 + 120x^2 + 1$$

3.

La fonction polynôme B est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc en particulier sur $[0; 10]$ et sur cet intervalle, on a :

$$B'(x) = -45x^2 + 240x + 180 = 15(-3x^2 + 16x + 12).$$

4.

Daprès le résultat précédent, le signe de $B'(x)$ est celui du facteur $-3x^2 + 16x + 12$.
Or pour ce trinôme : $\Delta = 16^2 - 4 \times (-3) \times 12 = 256 + 144 = 400 = 20^2 > 0$, donc ce trinôme a deux racines :

$$x_1 = \frac{-16 + 20}{-6} = -\frac{2}{3} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-16 - 20}{-6} = 6.$$

On sait que ce trinôme est négatif (signe de -3), sauf entre les racines.

5.

On a $x_1 \approx -0,67$ et $x_2 = 6$. Comme B est croissante sur $\left[-\frac{2}{3}; 6\right]$, la plus grande valeur de B est obtenue pour :

$$B(6) = -15 \times 6^3 + 120 \times 6^2 + 180 \times 6 - 750 = 1410$$

Soit 1410 €
Elle doit produire 6 km de tissu.