

La médiathèque d'une petite ville a ouvert ses portes début janvier 2013 et a enregistré 2,500 inscriptions pour l'année 2013.

Elle estime que, chaque année, 80 % des anciens inscrits renouvellent leur inscription l'année suivante et qu'il y aura également 400 nouveaux adhérents.

Pour tout entier naturel  $n$ , on peut donc modéliser le nombre d'inscrits à la médiathèque  $n$  années après 2013 par une suite numérique  $(a_n)$  définie par :  $a_0 = 2,500$  et  $a_{n+1} = 0,8a_n + 400$ .

1. Calculer  $a_1$  et  $a_2$ .
2. On pose, pour tout entier naturel  $n$ ,  $v_n = a_n - 2,000$ .
  - (a) Démontrer que  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison 0,8. Préciser son premier terme.
  - (b) Exprimer, pour tout entier naturel  $n$ ,  $v_n$  en fonction de  $n$ .
  - (c) En déduire que pour tout entier naturel  $n$ ,  $a_n = 500 \times 0,8^n + 2,000$ .
  - (d) Déterminer le plus petit entier naturel  $n$  tel que  $a_n \leq 2,010$ . Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.