Exercice 4 (5 points)

1. Calculer y lorsque $x = 20$ cm

Le volume de la boîte est donc :

$$V = 16xy$$

Avec $V = 10000$ et $x = 20$, on a donc :

$$10000 = 16 \times 20 \times y \iff 10000 = 320y \iff y = 31,25 \text{ cm}$$

2. Pour toute valeur de $x > 0$, on note $f(x)$ laire du parallélépipède rectangle. Démontrer que : pour tout $x > 0$,

$$f(x) = \frac{20000}{x} + 32x + 625$$

On a une base daire xy, deux côtés daire $16x$ et deux côtés daire $16y$.
Laire du parallélépipède rectangle est donc égale à :

$$f(x) = xy + 32x + 32y \text{ et on sait que } 10000 = 16xy \iff y = \frac{625}{x}$$

Donc

$$f(x) = x \times \frac{625}{x} + 32x + 32 \times \frac{625}{x} = 625 + 32x + \frac{20000}{x} = \frac{20000}{x} + 32x + 625$$

3. Quelles dimensions doit-on donner à ces boîtes pour que leur surface ait une aire minimale ?

On a $f'(x) = -\dfrac{20000}{x^2} + 32$.

- $\dfrac{20000}{x^2} + 32 > 0 \iff 32 > \dfrac{20000}{x^2} \iff x^2 > \dfrac{20000}{32} \iff x^2 > 625 \iff x > 25$
- $\dfrac{20000}{x^2} + 32 < 0 \iff 32 < \dfrac{20000}{x^2} \iff x^2 < \dfrac{20000}{32} \iff x^2 < 625 \iff x < 25$
- $\dfrac{20000}{x^2} + 32 = 0 \iff 32 = \dfrac{20000}{x^2} \iff x^2 = \dfrac{20000}{32} \iff x^2 = 625 \iff x = 25$

Donc laire est décroissante sur $[0, 25]$, puis croissante pour $x > 25$: le minimum de laire est donc obtenu pour $x = 25$. On aura $y = \dfrac{625}{25} = 25$.

Les boîtes feront donc : $25 \times 25 \times 16$ cm.