1.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-5\\2\end{pmatrix}$, doù $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 5 + 10 = 15$.

2.

a. Soit $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$, car $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux.
b. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ soit $AB \times AD = 15$.
Or

$$AB^2 = 1 + 25 = 26, \quad \text{donc} \quad AB = \sqrt{26}, \quad \text{donc} \quad AD = \frac{15}{\sqrt{26}}.$$

3.

Dans le triangle ACD rectangle en D, le théorème de Pythagore sécrit :
$CD^2 + AD^2 = AC^2$ soit $CD^2 + \left(\frac{15}{\sqrt{26}}\right)^2 = 5^2 + 2^2 = 29$,
doù $AD^2 = 29 - \frac{225}{26} = \frac{29 \times 26 - 225}{26} = \frac{754 - 225}{26} = \frac{529}{26}$.
Donc la hauteur du triangle ABC issue de C a pour longueur

$$CD = \sqrt{\frac{529}{26}}.$$

4.

En prenant comme base $[AB]$, avec $AB = \sqrt{26}$ et comme hauteur $[CD]$, avec $CD = \sqrt{\frac{529}{26}}$.

$$A(ABC) = \frac{AB \times CD}{2} = \frac{\sqrt{26} \times \sqrt{\frac{529}{26}}}{2} = \frac{\sqrt{529}}{2} = \frac{23}{2} = 11,5.$$