

Question 1

Un vecteur directeur de la droite est $\vec{u} \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}$, donc un vecteur normal est par exemple $\vec{n} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Question 2

Le point $H(3; 4)$ appartient à la droite (d) si et seulement si :

$$4 \times 3 + 5 \times 4 - 32 = 0$$

ce qui est vrai.

De plus, le vecteur $\overrightarrow{AH} \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \end{pmatrix}$ est bien orthogonal au vecteur directeur de la droite d'équation $4x + 5y - 32 = 0$, soit $\vec{d} \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Ainsi, le vecteur $\overrightarrow{AH} \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à la droite.

Question 3

Le point $M(x; y)$ appartient au cercle $\mathcal{C}(A, R = 2)$ si et seulement si :

$$AM^2 = 2^2 \quad \text{soit} \quad (x - (-1))^2 + (y - 3)^2 = 4,$$

ce qui équivaut à :

$$(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 4.$$

Question 4

L'équation de la parabole est donnée par :

$$y = 3x^2 - 9x + 5.$$

On peut la réécrire sous forme canonique :

$$y = 3(x^2 - 3x) + 5 = 3 \left[\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} \right] + 5 = 3 \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{27}{4} + 5 = 3 \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{7}{4}.$$

Cette forme montre que le minimum de la courbe est atteint pour $x = \frac{3}{2}$ et que le minimum vaut $f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{7}{4}$.

Ainsi, le sommet de la parabole est $S\left(\frac{3}{2}; -\frac{7}{4}\right)$ et l'axe de symétrie a pour équation $x = \frac{3}{2}$.

Question 5

Le trinôme $-3x^2 + 9x - 5$ a un discriminant :

$$\Delta = 81 - 4 \times (-3) \times (-5) = 81 - 60 = 21.$$

Comme $\Delta > 0$, le trinôme a deux racines :

$$x_1 = \frac{-9 + \sqrt{21}}{-6} \approx 0,74 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-9 - \sqrt{21}}{-6} \approx 2,26.$$

Puisque $a = -3 < 0$, le trinôme est négatif sur les intervalles en dehors des racines, donc il est négatif sur l'intervalle $[x_1; x_2]$.