1.

Avec $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}12\\6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{HC}\begin{pmatrix}6\\-12\end{pmatrix}$,
on a $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{HC} = 12\times 6 + 6\times(-12) = 72 - 72 = 0$.

De même avec $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}12\\-12\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{HB}\begin{pmatrix}6\\6\end{pmatrix}$,
on a $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{HB} = 12\times 6 + 6\times(-12) = 72 - 72 = 0$.

2.

On a donc (CH) est perpendiculaire à (AB) et (BH) est perpendiculaire à (AC). Les droites (CH) et (BH) sont donc deux hauteurs du triangle ABC : elles sont donc sécantes en H orthocentre du triangle et la troisième hauteur est la droite (CH).

3.

On a $KA^2 = 9^2 + (-3)^2 = 81 + 9 = 90$,
$KB^2 = 3^2 + 9^2 = 9 + 81 = 90$,
$KC^2 = (-3)^2 + (-9)^2 = 9 + 81 = 90$.

Or $KA^2 = KB^2 = KC^2 = 90$ entraîne $KA = KB = KC = R$.
Le point K est équidistant de A, B et C : cest donc le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

4.

Avec $M(8,7)$ et avec $G(g,g')$,

$$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}12\\-3\end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}8\\-2\end{pmatrix}.$$

On a donc

$$\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}8\\-2\end{pmatrix} = \overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}g+4\\g'-10\end{pmatrix}.$$

On en déduit que $g = 8 - 4 = 4$ et $g' = 10 - 2 = 8$. Donc $G(4,8)$.

5.

On a

$$\overrightarrow{GH}\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix} \quad et \quad \overrightarrow{GK}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}.$$

On a donc de façon évidente $\overrightarrow{GH} = 2\overrightarrow{GK}$: les vecteurs sont colinéaires, les droites (GH) et (GK) sont parallèles mais ont le point G commun, donc les points G, H et K sont alignés.