$p(5) = -x^3 + 3x^2 + 9x + 5$.

Partie A

1. On a :

$$\begin{aligned} p(5) &= -5^3 + 3 \times 5^2 + 9 \times 5 + 5 \\ &= -125 + 75 + 45 + 5 \\ &= 0. \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} (5-x)(x^2+2x+1) &= 5x^2 + 10x + 5 - x^3 - 2x^2 - x \\ &= -x^3 + 3x^2 + 9x + 5 \\ &= p(x). \end{aligned}$$

3. Le signe de $p(x)$ dépend donc de celui de $5 - x$ et de celui du trinôme :

$$x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2.$$

On sait que, quel que soit $a \in \mathbb{R}, a^2 \geqslant 0$. Le signe de $p(x)$ est donc celui de $5 - x$:

- $p(x) > 0$ sur $]-\infty\,;\,5[$;
- $p(x) < 0$ sur $]5\,;\,+\infty[$;
- $p(-1) = p(5) = 0$.

Partie B

1. Sur $\mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} p'(x) &= -3x^2 + 6x + 9 \\ &= 3(-x^2 + 2x + 3). \end{aligned}$$

2. Pour le trinôme $-x^2 + 2x + 3$, on a :

$$\Delta = 4 + 4 \times 3 = 16 = 4^2 > 0,$$

il a donc deux racines :

$$x_1 = \frac{-2+4}{-2} = -1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-2-4}{-2} = 3.$$

On sait que ce trinôme est négatif sauf sur l'intervalle $]-1\,;\,3[$.
La fonction est décroissante sauf sur l'intervalle $]-1\,;\,3[$ où elle est croissante de $p(-1) = 0$ à $p(3) = 32$.
Le maximum de la fonction p sur l'intervalle $[0\,;\,5]$ est donc $p(3) = 32$.