Exercice 3 (5 points)

1. Justifier que la superficie de lenclos, en m^2, est donnée en fonction de x par $g(x) = 4xe^{-0,5x}$ pour x dans lintervalle $[0; 5]$.

Pour $x \in [0; 5]$, on a $OA = x$ et $OC = f(x) = 4e^{-0,5x}$.
On a donc

$$A(OABC) = x \times f(x) = 4xe^{-0,5x}$$

2. La fonction g est dérivable sur $[0; 5]$. Montrer que, pour tout réel x de lintervalle $[0; 5]$, on a $g'(x) = (4 - 2x)e^{-0,5x}$.

Pour $x \in [0; 5]$, on a

$$g'(x) = 4e^{-0,5x} + 4xe^{-0,5x} \times (-0,5) = 4e^{-0,5x} - 2xe^{-0,5x} = (4 - 2x)e^{-0,5x}$$

3. En déduire le tableau de variations de la fonction g sur $[0; 5]$.

On sait que quel que soit le réel a, $e^a > 0$; le signe de $g'(x)$ est donc celui de $4 - 2x$. $4 - 2x > 0 \iff 4 > 2x \iff x < 2$
Sur lintervalle $[0; 2]$, la dérivée est positive, donc la fonction g est croissante de $g(0) = 0$ à $g(2) = 8e^{-1} \approx 2,943$. $g(2) = 8e^{-1}$ et $g(5) = 20e^{-2,5} \approx 1,642$.

Le tableau de variation est donc :

x	0		2		5
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	8e^{-1}	$\searrow$	$20\text{e}^{-2,5}$

4. Où doit-on placer le point A sur $[OD]$ pour obtenir une superficie denclos maximale ? Donner la superficie maximale possible en arrondissant le résultat au dm^2.

Daprès la question précédente lenclos aura une surface maximale pour $x = 2$ et on a vu que $g(2) \approx 2,943$, soit 2,94 m^2 au dm^2 près.