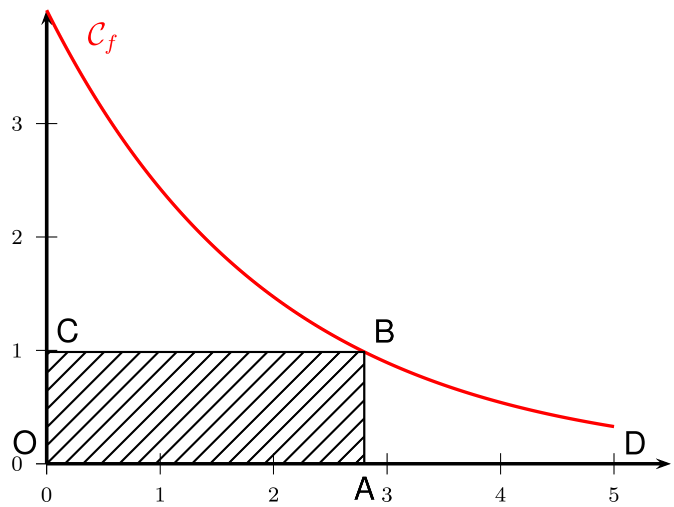
Exercice Première Spécialité - 2020 - Ex 3 : Exponentielle et Optimisation

Exponentielle Dérivation

Un propriétaire souhaite construire un enclos rectangulaire sur son terrain.

Celui-ci est représenté ci-dessous dans un repère orthonormé, d'unité le mètre. Il est délimité par l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées, la droite d'équation $x = 5$ et la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f définie sur [0 ; 5] par

$$f(x) = 4\text{e}^{-0,5x}.$$



L'enclos est représenté par le rectangle OABC où O est l'origine du repère et B un point de $\mathcal{C}_f$, A et C étant respectivement sur l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées. On note x l'abscisse du point A et D le point de coordonnées (5 ; 0).

Le but de l'exercice est de déterminer la position du point A sur le segment [OD] permettant d'obtenir un enclos de superficie maximale.

•

1. Justifier que la superficie de l'enclos, en m^2, est donnée en fonction de x par $g(x) = 4x\text{e}^{-0,5x}$ pour x dans l'intervalle [0 ; 5].
2. La fonction g est dérivable sur [0 ; 5]. Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle [0 ; 5], on a $g'(x) = (4 - 2x)\text{e}^{-0,5x}$.
3. En déduire le tableau de variations de la fonction g sur [0 ; 5].
4. Où doit-on placer le point A sur [OD] pour obtenir une superficie d'enclos maximale ?

   Donner la superficie maximale possible en arrondissant le résultat au dm^2.