Exercice 4 (5 points)

1. Déterminer le coût moyen quotidien pour la production de 5 m^3 dengrais.

On a :

$$f(5) = \frac{5^2 - 15 \times 5 + 400}{5} = \frac{25 - 75 + 400}{5} = \frac{350}{5} = 70$$

Le coût moyen de 5 m^3 dengrais est 7 000 .

2. Quels volumes dengrais faut-il fabriquer pour avoir un coût moyen de production égal à 4 300 (43 centaines deuros) ?

Il faut résoudre léquation :

$$f(x) = 43 \iff \frac{x^2 - 15x + 400}{x} = 43 \iff x^2 - 15x + 400 = 43x \quad (avec\ x \neq 0)$$

$$\iff x^2 - 58x + 400 = 0$$

Avec $\Delta = 58^2 - 4 \times 400 = 3364 - 1600 = 1764 = 42^2$, les racines sont :

$$x_1 = \frac{58 + 42}{2} = 50 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{58 - 42}{2} = 8$$

En fabriquant 8 ou 50 m^3 dengrais le coût moyen de production est 4 300 .

3. Pour quel volume dengrais fabriqué le coût moyen de production est-il minimal ? Déterminer ce coût moyen minimal.

La fonction f est dérivable sur $[5; 60]$ et sur cet intervalle :

$$f'(x) = \frac{x(2x - 15) - (x^2 - 15x + 400)}{x^2} = \frac{2x^2 - 15x - x^2 + 15x - 400}{x^2} = \frac{x^2 - 400}{x^2} = \frac{(x + 20)(x - 20)}{x^2}$$

$f'(x)$ est du signe de $(x + 20)(x - 20)$ (car $x^2 > 0$) et lon sait que ce trinôme est positif sauf sur $] - 20; 20[$.

Donc sur $[5; 20[$, $f'(x) < 0$ et f est donc décroissante et sur $[20; 60]$, la fonction f est croissante. Doù le tableau de variations (avec $f(20) = 25$) :

x	5		20		60
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	70	$\searrow$	25	$\nearrow$	α

avec $\alpha = f(60) \approx 51,7$

Daprès cette étude le minimum est atteint pour $x = 20$ et ce coût moyen minimal est égal à $f(20) = 25$, soit 2 500 .