$g(x) = \mathrm{e}^x - x + 1$.

1.

La fonction g est la somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$, et sa dérivée est :

$$g'(x) = \mathrm{e}^x - 1.$$

2.

$$\begin{aligned} & \mathrm{e}^x - 1 > 0 \\ \iff & \mathrm{e}^x > 1 \\ \iff & x > 0. \end{aligned}$$

On en déduit que la fonction est :

- décroissante sur $[-5\,;\,0]$ de $g(-5) = \mathrm{e}^{-5} - (-5) + 1 = \mathrm{e}^{-5} + 6$ à $g(0) = 1 - 0 + 1 = 2$,
- croissante sur $[0\,;\,5]$ de $g(0)$ à $g(5) = \mathrm{e}^5 - 5 + 1 = \mathrm{e}^5 - 4$.

3.

La question précédente a montré que le minimum de la fonction g sur l'intervalle $[-5\,;\,5]$ est 2, donc sur $[-5\,;\,5]$, $g(x) \geqslant 2 > 0$.

4.

On a, pour tout $x \in [-5\,;\,5]$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 + \frac{1 \times \mathrm{e}^x - x \times \mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x)^2} \\ &= 1 + \frac{\mathrm{e}^x(1-x)}{(\mathrm{e}^x)^2} \\ &= \frac{(\mathrm{e}^x)^2 + \mathrm{e}^x(1-x)}{(\mathrm{e}^x)^2} \\ &= \frac{\mathrm{e}^x(e^x + 1 - x)}{(\mathrm{e}^x)^2} \\ &= \frac{e^x + 1 - x}{\mathrm{e}^x} \\ &= \frac{1}{\mathrm{e}^x} \times g(x). \end{aligned}$$

Le signe de $f'(x)$ est donc celui de $g(x)$. Or, on a vu que sur $[-5\,;\,5]$, $g(x) > 0$, donc $f'(x) > 0$: la fonction f est donc strictement croissante de $f(0) = 1$ à plus l'infini.

5.

Si T_0 est cette tangente, on sait qu'une équation de T_0 est :

$$M(x\,;\,y) \in T_0 \iff y - f(0) = f'(0)(x-0).$$

Avec $f(0) = 1$ et $f'(0) = \dfrac{g(0)}{\mathrm{e}^0} = g(0) = 2$, l'équation devient :

$$\begin{aligned} & M(x\,;\,y) \in T_0 \\ \iff & y - 1 = 2(x-0) \\ \iff & y = 2x+1. \end{aligned}$$