1.

En dérivant le produit, toutes les fonctions étant dérivables :

$$f'(x) = 2e^x + (2x-1)e^x = e^x(2+2x-1) = (2x+1)e^x.$$

2.

On sait que, quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$: le signe de $f'(x)$ est celui de $2x+1$ qui s'annule pour :

$$2x+1=0 \quad\iff\quad x=-\frac{1}{2}.$$

On en déduit :

- $f'(x) > 0$ sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$;
- $f'(x) < 0$ sur l'intervalle $\left]-\infty\,;\,-\frac{1}{2}\right[$.

3.

La question précédente montre que la fonction f est décroissante sur l'intervalle $\left]-\infty\,;\,-\frac{1}{2}\right[$, et croissante sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$, avec un minimum en $x=-\frac{1}{2}$, où :

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(2\times\left(-\frac{1}{2}\right)-1\right)e^{-\frac{1}{2}} = -2e^{-\frac{1}{2}} \approx -1,213.$$

D'où le tableau de variations sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	$\approx -1,213$	$\nearrow$	

4.

C coupe l'axe des ordonnées en des points dont l'ordonnée est nulle, donc tels que :

$$(2x-1)e^x = 0 \quad\iff\quad 2x-1=0 \quad (\text{car } e^x \neq 0) \text{ d'où } x=\frac{1}{2}.$$

C coupe l'axe des ordonnées au point $\left(\frac{1}{2}\,;\,0\right)$.

5.

$M(x\,;\,y) \in T \iff y - f(0) = f'(0)(x-0)$.

Avec $f(0) = -e^0 = -1$ et $f'(0) = 1e^0 = 1$, on obtient :

$M(x\,;\,y) \in T \iff y - (-1) = 1(x-0) \iff y = x - 1$.