## 1.

$f(x) = 8x - 2x^3$.

**a.** $f$ est une fonction polynôme dérivable sur $\mathbb{R}$, donc sur $[0\,;\,2]$ et sur cet intervalle :

$$f'(x) = 8 - 6x^2 = 2(4 - 3x^2).$$

Comme $2 > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui de $4 - 3x^2$.

**b.** $4 - 3x^2$ est un trinôme dont les racines sont $-\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ et $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

Comme le coefficient $a = -3 > 0$, on sait que la fonction est croissante sauf sur l'intervalle $\left]-\dfrac{2}{\sqrt{3}}; \dfrac{2}{\sqrt{3}}\right[$ où elle est décroissante.

$f$ a donc un maximum local en $x = -\dfrac{2}{\sqrt{3}}$, tel que :

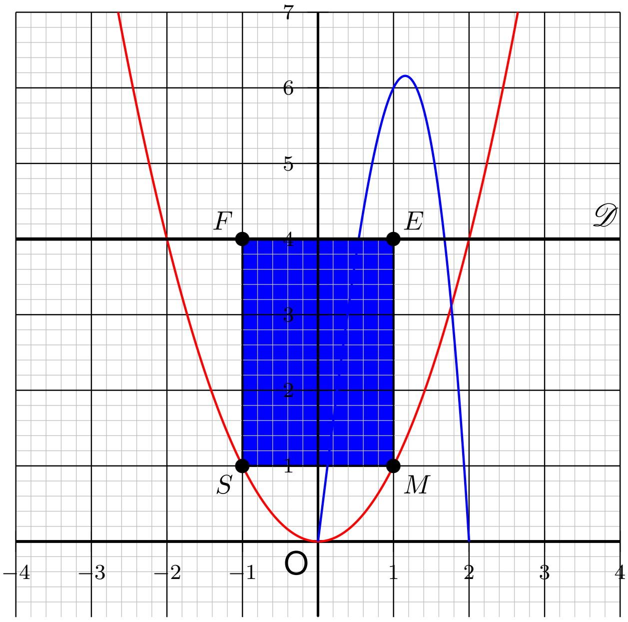
$$\begin{aligned} f\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right) &= 8 \times \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right) - 2\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3 \\ &= -\frac{16}{\sqrt{3}} + \frac{16}{3\sqrt{3}} \\ &= -\frac{48}{3\sqrt{3}} + \frac{16}{3\sqrt{3}} \\ &= -\frac{32}{3\sqrt{3}} \approx -6{,}16. \end{aligned}$$

$f$ a un minimum local en $x = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$, tel que :

$$\begin{aligned} f\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) &= 8 \times \frac{2}{\sqrt{3}} - 2\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3 \\ &= \frac{16}{\sqrt{3}} - \frac{16}{3\sqrt{3}} \\ &= \frac{48}{3\sqrt{3}} - \frac{16}{3\sqrt{3}} \\ &= \frac{32}{3\sqrt{3}} \approx 6{,}16. \end{aligned}$$

Comme on étudie la fonction $f$ sur l'intervalle $[0\,;\,2]$, on a donc :
$f$ est croissante sur $\left[0\,;\,\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right]$, puis décroissante sur $\left[\dfrac{2}{\sqrt{3}}\,;\,2\right]$.

## 2.




**a.** Pour $x = 1$ l'aire est égale à $2 \times (4 - 1) = 6$ et pour $x = 1{,}5$ l'aire est égale à $3 \times (4 - 2{,}25) = 5{,}25$.
L'aire n'est donc pas constante.

**b.** On a $M(x\,;\,x^2)$, $S(-x\,;\,x^2)$, $E(x\,;\,4)$ et $F(-x\,;\,4)$.
Si $x \in [0\,;\,2]$, alors $SM = 2x$ et $ME = 4 - x^2$.
Donc l'aire du rectangle $MSFE$, $\mathcal{A}(MSFE)$, est égale à :

$$\mathcal{A}(MSFE) = 2x \times (4 - x^2) = 8x - 2x^3 = f(x).$$

**c.** On a vu que sur l'intervalle $]0\,;\,2[$, $f$ a un maximum égal à :

$$f\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \frac{32}{3\sqrt{3}} \approx 6{,}16.$$