$f(x) = 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1.$

1.

f fonction polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc sur $[-3\,;\,3]$ et sur cet intervalle :

$$f'(x) = 6x^2 + 4x - 2 = 2(3x^2 + 2x - 1)$$

2.

$f'(x)$ a donc le signe du trinôme $3x^2 + 2x - 1$. Celui-ci a une racine évidente -1 et comme le produit des racines est égal à $\frac{c}{a} = -\frac{1}{3}$, l'autre racine est égale à $\frac{1}{3}$.

On sait que ce trinôme est positif sauf sur l'intervalle $\left[-1\,;\,\frac{1}{3}\right[$.

3.

De la question précédente on déduit que, sur l'intervalle $[-3\,;\,3]$:

$$f(-3) = 2\times(-3)^3 + 2\times(-3)^2 - 2\times(-3) + 1 = -29 \quad ; \quad f(-1) = -2 + 2 + 2 + 1 = 3$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = 2\times\frac{1}{27} + 2\times\frac{1}{9} - 2\times\frac{1}{3} + 1 = \frac{17}{27} \approx 0{,}63 \quad ; \quad f(3) = 54 + 18 - 6 + 1 = 67$$

x	-3	-1	$\frac{1}{3}$	3
f	-29	3	$\frac{17}{27} \approx 0{,}63$	67

4.

a. On sait que :

$$M(x\,;\,y) \in \mathcal{T} \iff y - f(0) = f'(0)(x - 0).$$

Avec $f(0) = 1$ et $f'(0) = -2$, on obtient :

$$\begin{aligned} & M(x\,;\,y) \in \mathcal{T} \\ \iff & y - 1 = -2x \\ \iff & y = -2x + 1. \end{aligned}$$

b. Un point de $\mathcal{T}$ appartient à la courbe $\mathcal{C}$ si ses coordonnées $(x\,;\,y)$ vérifient les deux équations suivantes :

$$\begin{cases} y = -2x+1 \\ y = 2x^3+2x^2-2x+1 \end{cases}$$

Cela donne :

$$\begin{aligned} & -2x+1 = 2x^3+2x^2-2x+1 \\ \iff & 2x^3+2x^2 = 0 \\ \iff & 2x^2(x+1) = 0, \end{aligned}$$

d'où :

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x^2 = 0 \\ x+1 = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ x = -1 \end{array} \right.$$

On retrouve donc le point A d'abscisse 0 et le point $B(-1\,;\,3)$.