$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$.

1.

La fonction polynôme f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur $[-1\,;\,5]$, et sa dérivée est :

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3).$$

2.

Le nombre 1 est une racine évidente du trinôme $x^2 - 4x + 3$, et comme le produit des racines est $\frac{c}{a} = \frac{3}{1} = 3$, l'autre racine est 3.
On sait que $x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3)$, donc $f'(x) = 3(x - 1)(x - 3)$.

3.

Le trinôme est du signe de $a = 1 > 0$, donc positif sauf sur l'intervalle $]1\,;\,3[$.
Il en résulte que sur l'intervalle $[-1\,;\,5]$:

$$f(-1) = -1 - 6 - 9 + 1 = -15 \quad ; \quad f(1) = 1 - 6 + 9 + 1 = 5$$

$$f(3) = 27 - 54 + 27 + 1 = 1 \quad ; \quad f(5) = 125 - 150 + 45 + 1 = 21$$

x	-1		1		3		5
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	-15	↗	5	↘	1	↗	21

4.

On sait qu'une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 0 est :

$$M(x\,;\,y) \in \mathcal{T} \iff y - f(0) = f'(0)(x - 0).$$

Avec $f(0) = 1$ et $f'(0) = 9$, on obtient :

$$M(x\,;\,y) \in \mathcal{T} \iff y = 9x + 1.$$

5.

Si une autre tangente est parallèle à $\mathcal{T}$, son coefficient directeur est égal à 9.
Or,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 9 \\ 3(x^2 - 4x + 3) &= 9 \\ x^2 - 4x + 3 &= 3 \\ x^2 - 4x &= 0 \\ x(x-4) &= 0. \end{aligned}$$

On retrouve $x = 0$ pour la tangente $\mathcal{T}$, et $x = 4$, pour lequel :

$$f(4) = 64 - 96 + 36 + 1 = 5.$$

La tangente à la courbe représentative de la fonction f au point $B(4\,;\,5)$ est parallèle à $\mathcal{T}$.