1.

Pour tout naturel n :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 6 \\ &= 0{,}5u_n + 3 - 6 \\ &= 0{,}5u_n - 3 \\ &= 0{,}5(u_n - 6) \\ &= 0{,}5v_n. \end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc une suite géométrique de raison $q = 0{,}5$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 6 = 7 - 6 = 1$.

2.

On sait qu'alors, quel que soit $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n = 1 \times 0{,}5^n = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2^n}.$$

3.

$v_n = u_n - 6 \quad$ équivaut à $\quad u_n = v_n + 6 = 6 + \dfrac{1}{2^n}$.

4.

a. On a :

$$S = v_0 + v_1 + \cdots + v_{100} \quad (1)$$

et :

$$0{,}5S = v_1 + v_2 + \cdots + v_{101} \quad (2).$$

et par différence $(1) - (2)$:

$$0{,}5S = v_0 - v_{101},$$

d'où :

$$S = \frac{v_0 - v_{101}}{0,5} = \frac{1 - \frac{1}{2^{101}}}{0,5} \approx 2.$$

b. Si $T = u_0 + u_1 + \cdots + u_{100}$, alors $T - 101 \times 6 = S$.
Donc :

$$T = S + 101 \times 6 = 606 + \frac{1 - \frac{1}{2^{101}}}{0,5} \approx 608.$$