$f(x) = (ax+b)\mathrm{e}^{-0,1x}$.

1.

On calcule $f(0) = (0+b)\mathrm{e}^{-0,1\times 0} = b\mathrm{e}^0 = b = 5$ puisque $A(0\,;\,5) \in \mathcal{C}_f$.

2.

a. Pour l'équation réduite de (AB), l'ordonnée à l'origine est 5 et le coefficient directeur de la droite est égal à :

$$\frac{19-5}{4-0} = \frac{14}{4} = 3{,}5.$$

L'équation réduite de la droite (AB) est donc $y = 3{,}5x+5$.

b. On a $f(x) = (ax+5)\mathrm{e}^{-0,1x}$, f est un produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, donc en dérivant comme un produit $((uv)' = u'v+uv')$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= a\mathrm{e}^{-0,1x} - 0{,}1(ax+5)\mathrm{e}^{-0,1x}\\ &= \mathrm{e}^{-0,1x}[a-0{,}1(ax+5)]\\ &= \mathrm{e}^{-0,1x}(a-0{,}1ax-0{,}5). \end{aligned}$$

Or on sait que le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0 est le nombre dérivé $f'(0)$. Donc :

$$f'(0) = \mathrm{e}^0(a-0-0{,}5) = a-0{,}5 = 3{,}5,\ \text{d'où on déduit } a = 3{,}5+0{,}5 = 4.$$

On a donc sur $\mathbb{R}$, $f(x) = (4x+5)\mathrm{e}^{-0,1x}$.

3.

a. Avec l'expression trouvée pour $f'(x)$ ci-dessus et en remplaçant a par 4, on obtient :

$$f'(x) = \mathrm{e}^{-0,1x}(4-0{,}1\times 4x-0{,}5) = (-0{,}4x+3{,}5)\mathrm{e}^{-0,1x}.$$

b. On sait que, quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-0,1x} > 0$, donc le signe de $f'(x)$ est celui de $-0{,}4x+3{,}5$.

$$\begin{aligned} & -0{,}4x+3{,}5 > 0\\ \iff & 3{,}5 > 0{,}4x\\ \iff & \frac{3{,}5}{0{,}4} > x\\ \iff & x < 8{,}75 \end{aligned}$$

f est croissante sur $]-\infty\,;8{,}75[$, puis décroissante sur $]8{,}75\,;+\infty[$, avec un maximum en :

$$f(8{,}75) = (4\times 8{,}75+5)\mathrm{e}^{-0,1\times 8,75} \approx 16{,}675.$$

(ce que confirme la figure)