ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES - Première générale

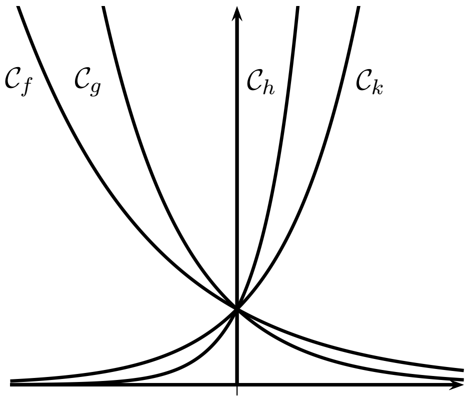
Exercice 1 **5 points**

Cet exercice est un QCM en 5 questions. Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses proposées est correcte. Les questions sont **indépendantes**.

Pour chaque question, indiquer le numéro de la question et recopier sur la copie la lettre correspondante à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée, cependant des traces de recherche au brouillon peuvent aider à trouver la bonne réponse. Chaque réponse correcte rapporte 1 point. Une réponse incorrecte ou une question sans réponse n'apporte, ni ne retire de point.

Question 1

Dans le repère orthogonal suivant on a tracé quatre courbes, chacune associée à une fonction de variable réelle x et d'expression $\mathrm{e}^{\lambda x}$ où λ est un paramètre réel.



Quelle courbe possède le plus petit paramètre λ ?

a. $\mathcal{C}_f$	**b.** $\mathcal{C}_g$	**c.** $\mathcal{C}_h$	**d.** $\mathcal{C}_k$

Question 2

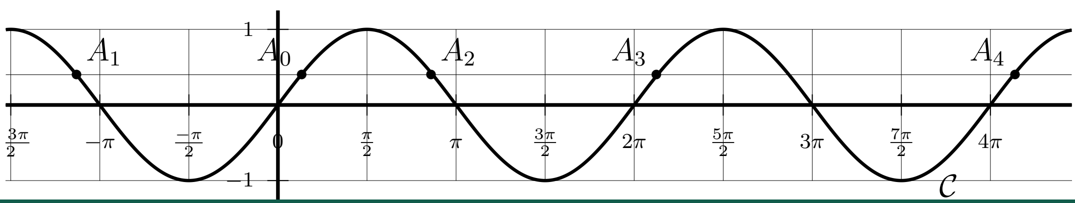
On choisit au hasard un couple ayant deux enfants et on note X la variable aléatoire égale au nombre de filles du couple. On admet que la probabilité qu'un enfant soit une fille est égale à 0,5 et qu'il y a indépendance du sexe de l'enfant entre deux naissances.

Déterminer $P(X \geqslant 1)$.

a. 0,25	**b.** 0,5	**c.** $\frac{1}{3}$	**d.** 0,75

Question 3

On a représenté ci-dessous la courbe $\mathcal{C}$ de la fonction sinus dans un repère orthogonal.



$A_0,\ A_1,\ A_2,\ A_3$ et A_4 sont des points de $\mathcal{C}$ et ils ont tous la même ordonnée.
Parmi les segments suivants, lequel a pour longueur la période de la fonction sinus ?

a. $[A_0\ ;\ A_1]$	**b.** $[A_0\ ;\ A_2]$	**c.** $[A_0\ ;\ A_3]$	**d.** $[A_0\ ;\ A_4]$

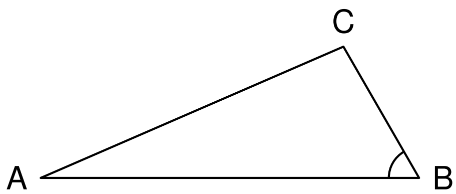
Question 4

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 0,5x^2 - 2x + 1$.
On considère l'équation $f(x) = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
L'ensemble des solutions de cette équation est:

a. $\emptyset$	**b.** $\{2-\sqrt{2}\ ;\ 2+\sqrt{2}\}$	**c.** $\{2-\sqrt{6}\ ;\ 2+\sqrt{6}\}$	**d.** $\{4-2\sqrt{2}\ ;\ 4+2\sqrt{2}\}$

Question 5

ABC est un triangle tel que: AB = 5, BC = 2, $\widehat{\text{ABC}} = 60$.



La longueur AC est égale à :

a. $\sqrt{19}$	**b.** $\sqrt{21}$	**c.** $\sqrt{28}$	**d.** $\sqrt{29}$

Exercice 2 **5 points**

On modélise la diffusion dans le sang d'un médicament de 1 gramme par intraveineuse (fonction f_1, courbe représentative C_1) ou par voie orale (fonction f_2, courbe représentative C_2) pendant une durée de 10 heures.

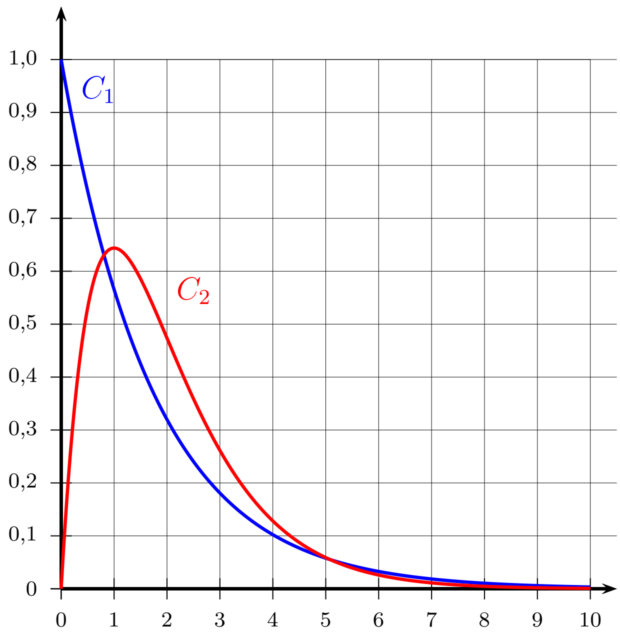
Plus précisément :

- $f_1(t)$ modélise la proportion du médicament dans le sang à l'instant t, où t est le temps en heure après injection par intraveineuse ;
- $f_2(t)$ modélise la proportion du médicament dans le sang à l'instant t, où t est le temps en heure après administration par voie orale.

Pour tout réel t de l'intervalle [0 ; 10], on admet que

$$f_1(t) = \mathrm{e}^{-0,57t} \quad \text{et} \quad f_2(t) = 1,75t\mathrm{e}^{-t}.$$

Les courbes C_1 et C_2 de f_1 et f_2 sont représentées ci-dessous.



1. *Injection par voie intraveineuse*
   (a) Déterminer le sens de variation de la fonction f_1.
   (b) Résoudre graphiquement $f_1(t) < 0,1$.
   Interpréter la réponse dans le contexte.

2. *Administration par voie orale*
   On note f_2' fonction dérivée de la fonction f_2.

   (a) Montrer que, pour tout t de [0 ; 10], $f_2'(t) = 1,75(1 - t)\mathrm{e}^{-t}$.
   (b) Construire le tableau de variations de la fonction f_2.
   (c) À quel instant t la proportion de médicament dans le sang est-elle la plus élevée ?

Exercice 3 **5 points**

Dans un pays, le nombre de créations d'entreprise augmente $1,5\,\%$ par mois.
En janvier 2018 on compte 50,000 créations d'entreprise.
On modélise le nombre de créations d'entreprise au n-ième mois par une suite (u_n) telle que

$$u_0 = 50 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = u_n \times 1,015,$$

où u_n est exprimé en milliers d'euros.

1. (a) Calculer u_1.
   (b) Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

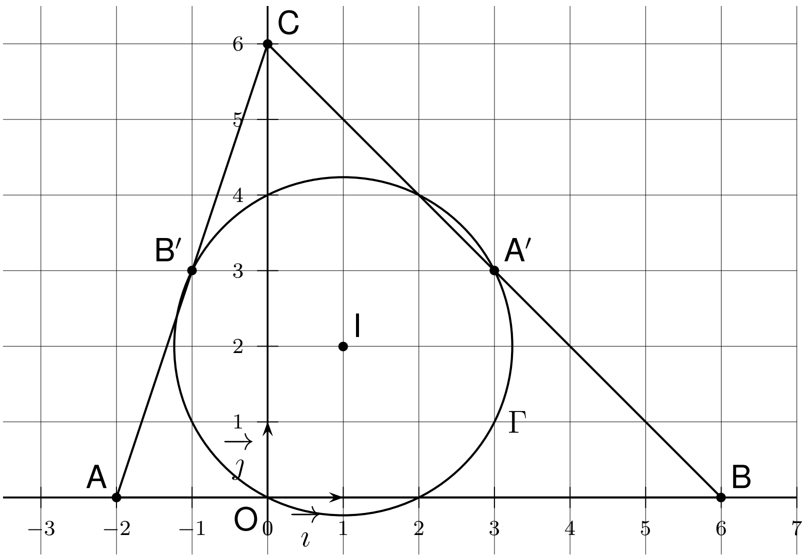
2. (a) Quelle est la nature de la suite (u_n) ?

(b) Exprimer u_n en fonction de n.

(c) Un journaliste annonce qu'au total dans l'année 2018, près de 652,000 entreprises se sont créées.
Donner un calcul permettant de justifier les propos du journaliste.

Exercice 4 **5 points**

$\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\right)$ est un repère orthonormé du plan.
On considère les points A, B et C de coordonnées respectives $(-2\,;\,0)$, (6 ; 0) et (0 ; 6).
Les points A′, B′ et C′ milieux respectifs des segments [BC], [AC] et [AB].
Le cercle Γ passant par les points A′, B′ et C′ a pour centre le point I de coordonnées (1 ; 2).



1. (a) Calculer le rayon de ce cercle.
   (b) En déduire qu'une équation du cercle Γ est $(x-1)^2+(y-2)^2=5$.
2. Propriété des hauteurs du triangle ABC
   (a) On admet que O est le pied de la hauteur issue de C.
   Montrer que le point O est sur le cercle Γ.
   (b) Soit $\mathrm{H_A}$ le pied de la hauteur issue de A.
   Montrer que $\mathrm{H_A}$ a pour coordonnées (2; 4).
   (c) Justifier que la point $\mathrm{H_A}$ est sur le cercle Γ.