

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES - Première générale

Exercice 1

5 points

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM). Pour chacune des questions, une seule des quatre propositions est correcte.

Les questions sont indépendantes. Pour chaque question, indiquer le numéro de la question et recopier sur la copie la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Chaque réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte aucun point.

Question 1

On lance deux fois une pièce équilibrée, de manières identiques et indépendantes.

Si le joueur obtient 2 Faces, il perd 5 €, s'il obtient exactement une Face, il gagne 2 €, s'il obtient 2 Piles il gagne 4 €.

On note G la variable aléatoire correspondant au gain algébrique du joueur, en euros.

- | | | | |
|-------------------------|----------------------|----------------------|-----------------------|
| a. $E(G) = 0,75$ | b. $E(G) = 3$ | c. $E(G) = 1$ | d. $E(G) = -4$ |
|-------------------------|----------------------|----------------------|-----------------------|

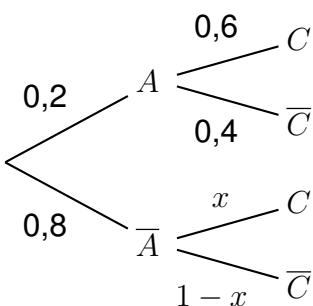
Question 2

A et B sont deux évènements, et on donne $P(A) = \frac{3}{7}$, $P(B) = \frac{3}{20}$, $P(A \cup B) = \frac{4}{7}$.

- | | | | |
|---|------------------------------------|---|-----------------------------------|
| a. A et B sont indépendants. | b. $P_A(B) = \frac{3}{980}$ | c. $P(A \cap B) = \frac{1}{140}$ | d. $P_A(B) = \frac{1}{60}$ |
|---|------------------------------------|---|-----------------------------------|

Question 3

On donne l'arbre de probabilités ci-dessous, ainsi que la probabilité $P(C) = 0,48$.



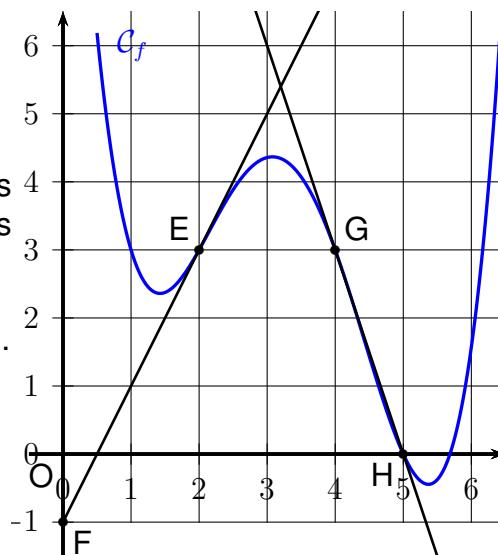
- | | | | |
|---------------------|----------------------|----------------------|-----------------------------------|
| a. $x = 0,6$ | b. $x = 0,36$ | c. $x = 0,45$ | d. $x = \frac{0,48}{0,12}$ |
|---------------------|----------------------|----------------------|-----------------------------------|

Question 4

On a tracé la courbe représentative \mathcal{C}_f d'une fonction f dans un repère orthonormé, ainsi que deux de ses tangentes, au point E d'abscisse 2 et au point G d'abscisse 4.

Les coordonnées des points E, F, G, H placés dans le repère ci-contre peuvent être lues graphiquement, ce sont des entiers.

La tangente à \mathcal{C}_f au point E est la droite (EF).
 La tangente à \mathcal{C}_f au point G est la droite (GH).
 On note f' la fonction dérivée de f .



- | | | | |
|-----------------------|-----------------------|-----------------------|------------------------|
| a. $f'(2) = 4$ | b. $f'(2) = 3$ | c. $f'(4) = 3$ | d. $f'(4) = -3$ |
|-----------------------|-----------------------|-----------------------|------------------------|

Question 5

On considère la fonction Python suivante :

```
def evolu(k) :
    i = 200
    n = 0
    while i < k :
        i = 1.2 * i + 10
        n = n + 1
    return n
```

- | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| a. $evolu(500) = 4$ | b. $evolu(600) = 5$ | c. $evolu(300) = 3$ | d. $evolu(400) = 4$ |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

Exercice 2

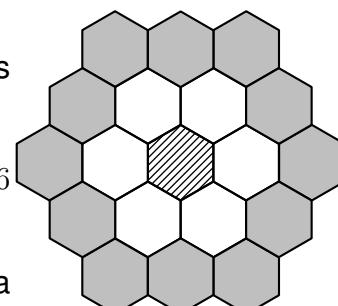
5 points

Un artisan commence la pose d'un carrelage dans une grande pièce.

Le carrelage choisi a une forme hexagonale.

L'artisan pose un premier carreau au centre de la pièce puis procède en étapes successives de la façon suivante :

- à l'étape 1, il entoure le carreau central, à l'aide de 6 carreaux et obtient une première forme.
- à l'étape 2 et aux étapes suivantes, il continue ainsi la pose en entourant de carreaux la forme précédemment construite.



On note u_n le nombre de carreaux ajoutés par l'artisan pour faire la n -ième étape ($n \geq 1$).
 Ainsi $u_1 = 6$ et $u_2 = 12$.

1. Quelle est la valeur de u_3 ?
2. On admet que la suite (u_n) est arithmétique de raison 6. Exprimer u_n en fonction de n .
3. Combien l'artisan a-t-il ajouté de carreaux pour faire l'étape 5 ?
 Combien a-t-il alors posé de carreaux au total lorsqu'il termine l'étape 5 (en comptant le carreau central initial) ?
4. On pose $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$. Montrer que $S_n = 6(1+2+3+\dots+n)$ puis que $S_n = 3n^2 + 3n$.
5. Si on compte le premier carreau central, le nombre total de carreaux posés par l'artisan depuis le début, lorsqu'il termine la n -ième étape, est donc $3n^2 + 3n + 1$.
 À la fin de sa semaine, l'artisan termine la pose du carrelage en collant son 2,977e carreau. Combien a-t-il fait d'étapes ?

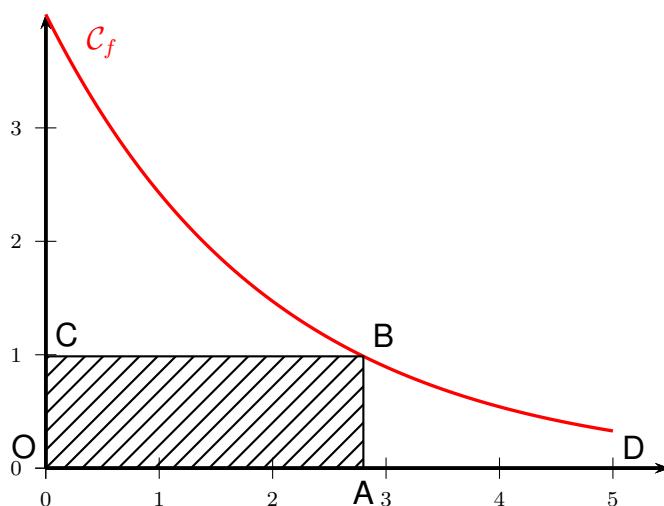
Exercice 3

5 points

Un propriétaire souhaite construire un enclos rectangulaire sur son terrain.

Celui-ci est représenté ci-dessous dans un repère orthonormé, d'unité le mètre. Il est délimité par l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées, la droite d'équation $x = 5$ et la courbe \mathcal{C}_f représentative de la fonction f définie sur $[0 ; 5]$ par

$$f(x) = 4e^{-0,5x}.$$



L'enclos est représenté par le rectangle OABC où O est l'origine du repère et B un point de \mathcal{C}_f , A et C étant respectivement sur l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées. On note x l'abscisse du point A et D le point de coordonnées $(5 ; 0)$.

Le but de l'exercice est de déterminer la position du point A sur le segment [OD] permettant d'obtenir un enclos de superficie maximale.

•

1. Justifier que la superficie de l'enclos, en m^2 , est donnée en fonction de x par $g(x) = 4x\text{e}^{-0,5x}$ pour x dans l'intervalle $[0 ; 5]$.
2. La fonction g est dérivable sur $[0 ; 5]$. Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0 ; 5]$, on a $g'(x) = (4 - 2x)\text{e}^{-0,5x}$.
3. En déduire le tableau de variations de la fonction g sur $[0 ; 5]$.
4. Où doit-on placer le point A sur $[OD]$ pour obtenir une superficie d'enclos maximale ?
Donner la superficie maximale possible en arrondissant le résultat au dm^2 .

Exercice 4

5 points

Le logo d'une entreprise est constitué d'un carré, d'un cercle et d'un triangle. Il a été représenté ci-dessous dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

On donne les coordonnées des sommets du carré :

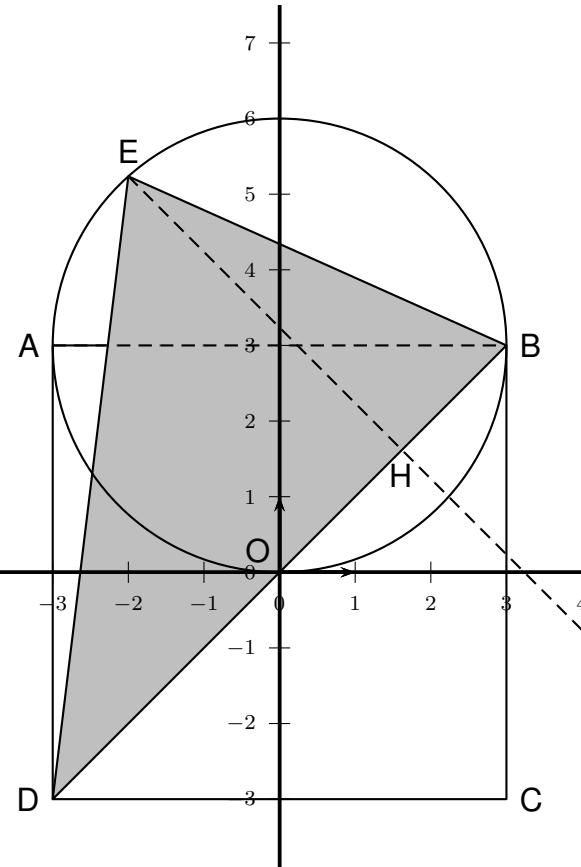
$A(-3 ; 3)$, $B(3 ; 3)$, $C(3 ; -3)$,
 $D(-3 ; -3)$.

On considère le point

$E(-2 ; 3 + \sqrt{5})$.

On admettra que E est situé sur le cercle de diamètre $[AB]$.

On note I le milieu de $[AB]$.



1. Donner une équation cartésienne de la droite (BD) et une équation du cercle de diamètre $[AB]$.
2. Montrer que la hauteur du triangle BDE issue de E admet pour équation cartésienne

$$x + y - (1 + \sqrt{5}) = 0.$$

3. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H du point E sur la droite (BD) .
4. Calculer l'aire du triangle BDE (en unités d'aire).
5. Montrer que $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DE} = 42 + 6\sqrt{5}$.

On admet que $\|\overrightarrow{DE}\| = \sqrt{42 + 12\sqrt{5}}$; en déduire la mesure de l'angle \widehat{BDE} au degré près.