EXERCICE 1 — 5 POINTS

Ce QCM comprend 5 questions.
Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses proposées est correcte.
Les questions sont indépendantes.
Pour chaque question, indiquer le numéro de la question et recopier sur la copie la lettre correspondante à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée mais il peut être nécessaire d'effectuer des recherches au brouillon pour aider à déterminer votre réponse.
Chaque réponse correcte rapporte 1 point. Une réponse incorrecte ou une question sans réponse n'apporte ni ne retire de point.

Question 1

Pour tout réel x, $\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{x+1}}$ est égale à :

a. e^{x-1} **b.** e^{3x+1} **c.** $\dfrac{2x}{x+1}$ **d.** e.

Question 2

Dans le plan muni d'un repère, les courbes représentatives des fonctions

$$x \mapsto 15x^2 + 10x - 1 \text{ et } x \mapsto 19x^2 - 22x + 10$$

ont :

a. aucun point d'intersection **b.** un seul point d'intersection **c.** deux points d'intersection **d.** quatre points d'intersection.

Question 3

Le plan est rapporté à un repère orthonormé. Le cercle de centre A de coordonnées $(3\ ;\ -1)$ et de rayon 5 a pour équation cartésienne :

a. $(x+3)^2 + (y-1)^2 = 25$ **b.** $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 5$
c. $(x+3)^2 + (y-1)^2 = 5$ **d.** $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 25$.

Question 4

Dans un repère orthonormé, la droite d d'équation cartésienne $3x + 2y + 4 = 0$ admet un vecteur normal de coordonnées :

a. $\binom{2}{-3}$ **b.** $\binom{-3}{2}$ **c.** $\binom{3}{2}$ **d.** $\binom{2}{3}$.

Question 5

Le plus petit entier naturel n tel que la somme $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n$ soit supérieure à 5,000 est égal à :

a. $1{,}000$ **b.** 500 **c.** 200 **d.** 100.

EXERCICE 2 — 5 POINTS

On considère la fonction dérivable f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 8x^3 - 6x^2 - 2.$$

On note f' la fonction dérivée de la fonction f.
Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un plan muni d'un repère orthogonal.

1. (a) Justifier que pour tout réel x,

$$f(x) = (x-1)\left(8x^2+2x+2\right).$$

   (b) En déduire que la courbe $\mathcal{C}$ coupe l'axe des abscisses en un seul point A dont on donnera les coordonnées.

2. (a) Justifier que pour tout réel x, $f'(x) = 12x(2x-1)$.

   (b) En déduire le tableau de variations de la fonction f.

3. Le point B de coordonnées $\left(0\ ;\ -\dfrac{5}{2}\right)$ appartient-il à la tangente T à la courbe $\mathcal{C}$ au point $\cancel{B}$ d'abscisse $x = \dfrac{1}{2}$? Justifier.

EXERCICE 3 — 5 POINTS

Un parfumeur propose l'un de ses parfums, appelé Fleur Rose , et cela uniquement avec deux contenances de flacons : un de 30 ml ou un de 50 ml. Pour l'achat d'un flacon Fleur Rose , il propose une offre promotionnelle sur un autre parfum appelé Bois d'ébène .

On dispose des données suivantes :

- 58 % des clients achètent un flacon de parfum Fleur Rose de 30 ml et, parmi ceux là, 24 % achètent également un flacon du parfum Bois d'ébène ;
- 42 % des clients achètent un flacon de parfum Fleur Rose de 50 ml et, parmi ceux là, 13 % achètent également un flacon du parfum Bois d'ébène .

On admet qu'un client donné n'achète qu'un seul flacon de parfum Fleur de Rose (soit en 30 ml soit en 50 ml), et que s'il achète un flacon du parfum Bois d'ébène , il n'en achète aussi qu'un seul flacon.

On choisit au hasard un client achetant un flacon du parfum Fleur Rose . On considère les évènements suivants :

- F : le client a acheté un flacon Fleur Rose de 30 ml ;
- B : le client a acheté un flacon Bois d'ébène .

1. Construire un arbre pondéré traduisant les données de l'exercice.
2. Calculer la probabilité $p(F \cap B)$.
3. Calculer la probabilité que le client ait acheté un flacon Bois d'ébène .

4. Un flacon Fleur Rose de 30 ml est vendu 40 €, un flacon Fleur Rose de 50 ml est vendu 60 € et un flacon Bois d'ébène 25 €.

   On note X la variable aléatoire correspondant au montant total des achats par un client du parfum Fleur Rose .

   (a) Déterminer la loi de probabilité de X.

   (b) Calculer l'espérance de X et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

EXERCICE 4 — 5 POINTS

D'après l'ADEME (Agence De l'Environnement et de la Maîtrise de l'Énergie), chaque Français a produit une masse moyenne de 365 kg de déchets ménagers en 2018.

Un maire, étant informé que la masse moyenne de déchets ménagers dans sa commune en 2018 était de 400 kg par habitant, décide d'une campagne annuelle de sensibilisation au recyclage qui conduit à une réduction de cette production de 1,5 % par an, et cela dès l'année 2019.

On modélise alors la masse moyenne de déchets ménagers par habitant calculée en fin d'année dans cette commune par une suite (d_n) où pour tout entier naturel n, d_n correspond à la masse moyenne de déchets ménagers par habitant, en kg, pour l'année 2018+ n.

Ainsi, $d_0 = 400$.

1. Prouver que $d_1 = 394$. Interpréter ce résultat.

2. (a) Déterminer la nature de la suite (d_n). Préciser sa raison et son premier terme.

   (b) Pour tout entier naturel n, exprimer d_n en fonction de n.

3. (a) D'après le tableau de valeurs suivant, en quelle année la masse moyenne de déchets ménagers par habitant deviendra-t-elle inférieure à 365 kg ?

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
d_n	400	394	388,09	382,27	376,53	370,89	365,32	359,84	354,45

   (b) Écrire une fonction Python qui retourne l'année à laquelle la masse moyenne de déchets ménagers par habitant de la commune devient inférieure à 365 kg.