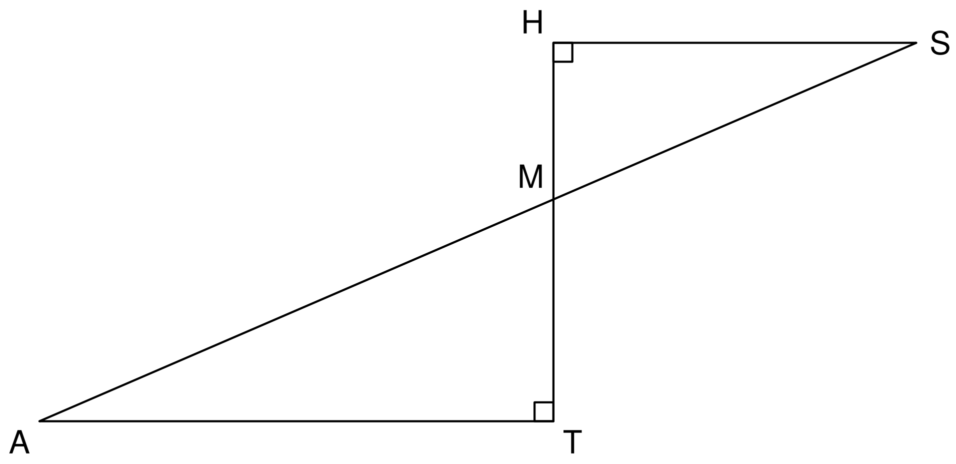
Exercice Brevet 2022 - Amérique du Nord - Ex 1 : Pythagore, Thalès et Homothétie

Pythagore | Thalès | Trigonométrie | Transformations | Agrandissement-réduction

La figure ci-dessous n'est pas à l'échelle.

- les points M, A et S sont alignés
- les points M, T et H sont alignés
- MH = 5 cm
- MS = 13 cm
- MT = 7 cm



1. Démontrer que la longueur HS est égale à 12 cm.
2. Calculer la longueur AT.
3. Calculer la mesure de l'angle $\widehat{HMS}$. On arrondira le résultat au degré près.
4. Parmi les transformations suivantes quelle est celle qui permet d'obtenir le triangle MAT à partir du triangle MHS ?

   Dans cette question, aucune justification n'est attendue.

   Recopier la réponse sur la copie.

Une symétrie centrale	Une symétrie axiale	Une rotation	Une translation	Une homothétie

5. Sachant que la longueur MT est 1,4 fois plus grande que la longueur HM, un élève affirme: L'aire du triangle MAT est $1,4$ fois plus grande que l'aire du triangle MHS.

   Cette affirmation est-elle vraie ? On rappelle que la réponse doit être justifiée.

Correction

1. Dans le triangle HMS, rectangle en H, on connaît MH = 5 cm et MS = 13 cm.
   D'après le théorème de Pythagore, on sait que : $\mathrm{MS}^2 = \mathrm{MH}^2 + \mathrm{HS}^2$
   En remplaçant les longueurs connues : $13^2 = 5^2 + \mathrm{HS}^2$
   Donc : $\mathrm{HS}^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144$
   Comme HS est une longueur, elle est donc positive, et donc on en déduit :
   $\mathrm{HS} = \sqrt{144} = 12$ cm.
2. On sait que :
   - Les points H, M et T sont alignés, dans cet ordre;
   - Les points S, M et A sont alignés dans le même ordre;
   - Les droites (HS) et (MT) sont parallèles entre elles, car elles sont perpendiculaires à la même troisième droite (HT).

   D'après le théorème de Thalès appliqué dans cette configuration, on en déduit :
   $\dfrac{\mathrm{MH}}{\mathrm{MT}} = \dfrac{\mathrm{MS}}{\mathrm{MA}} = \dfrac{\mathrm{HS}}{\mathrm{AT}}$. Notamment : $\dfrac{\mathrm{MH}}{\mathrm{MT}} = \dfrac{\mathrm{HS}}{\mathrm{AT}}$
   Soit, en remplaçant par les valeurs connues : $\dfrac{5}{7} = \dfrac{12}{\mathrm{AT}}$
   À l'aide d'un produit en croix, on a donc : $\mathrm{AT} = \dfrac{12 \times 7}{5} = 16,8$ cm
   Remarque : On aurait aussi pu utiliser la notion de triangle semblable.
3. Dans le triangle HMS, rectangle en H, on peut utiliser la trigonométrie. Ici, comme toutes les longueurs du triangle sont connues, on peut utiliser le sinus, le cosinus ou la tangente.
   Notamment : $\cos\left(\widehat{\text{HMS}}\right) = \dfrac{\mathrm{HM}}{\mathrm{MS}} = \dfrac{5}{13}$.
   On en déduit : $\widehat{\text{HMS}} = \arccos\left(\dfrac{5}{13}\right) \approx 67\,°$, arrondi au degré près.

4. Les triangles MAT et MHS sont semblables, mais ils n'ont pas les mêmes dimensions, donc les symétries (axiales et centrales), les rotations et les translations conservant les longueurs, ce n'est pas possible.

   Par contre, une homothétie est possible. Ici, si on veut préciser, c'est une homothétie, de centre M et de rapport $-\frac{7}{5}$.

   Remarque : Ici, aucune justification ni précision n'était attendue.

5. L'affirmation est fausse : on sait que le triangle MAT est un agrandissement de MSH de rapport $k = 1,4$, donc les longueurs seront bien multipliées par 1,4, mais les surfaces seront multipliées par $k^2 = 1,4^2 = 1,96$

   Remarque : une autre justification possible est de calculer les aires des triangles rectangles. Puisque la base **et** la hauteur sont multipliées par 1,4, l'aire est bien multipliée par $1,4^2$.