

Léa pense qu'en multipliant deux nombres impairs consécutifs (c'est-à-dire qui se suivent) et en ajoutant 1, le résultat obtenu est toujours un multiple de 4.

1. Étude d'un exemple :

5 et 7 sont deux nombres impairs consécutifs.

(a) Calculer $5 \times 7 + 1$.

(b) Léa a-t-elle raison pour cet exemple ?

2. Le tableau ci-dessous montre le travail qu'elle a réalisé dans une feuille de calcul.

	A	B	C	D	E
1		Nombre impair	Nombre impair suivant	Produit de ces nombres impairs consécutifs	Résultat obtenu
2	x	$2x + 1$	$2x + 3$	$(2x + 1)(2x + 3)$	$(2x + 1)(2x + 3) + 1$
3	0	1	3	3	4
4	1	3	5	15	16
5	2	5	7	35	36
6	3	7	9	63	64
7	4	9	11	99	100
8	5	11	13	143	144
9	6	13	15	195	196
10	7	15	17	255	256
11	8	17	19	323	324
12	9	19	21	399	400

(a) D'après ce tableau, quel résultat obtient-on en prenant comme premier nombre impair 17 ?

(b) Montrer que cet entier est un multiple de 4.

(c) Parmi les quatre formules de calcul tableur suivantes, deux formules ont pu être saisies dans la cellule D3. Lesquelles? Aucune justification n'est attendue.

Formule 1 : $= (2 * A3 + 1) * (2 * A3 + 3)$

Formule 2 : $= (2 * B3 + 1) * (2 * C3 + 3)$

Formule 3 : $= B3 * C3$

Formule 4 : $= (2 * D3 + 1) * (2 * D3 + 3)$

3. Étude algébrique :

(a) Développer et réduire l'expression $(2x + 1)(2x + 3) + 1$.

(b) Montrer que Léa avait raison: le résultat obtenu est toujours un multiple de 4.

Correction

1. Étude d'un exemple :

(a) $5 \times 7 + 1 = 35 + 1 = 36 = 4 \times 9.$

(b) Oui

2. (a) $17 \times 19 + 1 = 324.$

(b) $324 = 320 + 4 = 4 \times 80 + 4 \times 1 = 4 \times (80 + 1) = 4 \times 81.$

(c) Les formules 2 et 3 donnent le bon produit.

3. Étude algébrique :

(a) $(2x + 1)(2x + 3) + 1 = 4x^2 + 6x + 2x + 3 + 1 = 4x^2 + 8x + 4.$

(b) $4x^2 + 8x + 4 = 4(x^2 + 2x + 1).$ On a même $(2x + 1)(2x + 3) + 1 = 4(x + 1)^2.$