

Dans cet exercice, les deux parties sont indépendantes.

On considère les fonctions f et g définies par

$$f(x) = (x + 2)^2 - x \quad \text{et} \quad g(x) = 7x + 4.$$

Partie A

1. Calculer $f(-4)$.
2. Déterminer un antécédent de 3 par la fonction g .

Partie B

Trois élèves, Paul, Jane et Morgane, cherchent à résoudre l'équation $f(x) = g(x)$ par trois méthodes différentes.

1. Paul utilise un tableur.

Il calcule ainsi les images des entiers compris entre -3 et 3 par les fonctions f et g .

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	x	-3	-2	-1	0	1	2	3
2	$f(x)$	4	2	2	4	8	14	22
3	$g(x)$	-17	-10	-3	4	11	18	25

- (a) Quelle formule a-t-il saisie en cellule B3 puis étirée vers la droite pour compléter la ligne 3 du tableau ?
- (b) Avec cette méthode, quelle(s) solution(s) trouve-t-il à l'équation $f(x) = g(x)$?

2. Jane utilise un logiciel de programmation.

Le programme suivant qu'elle a créé permet de tester l'égalité $f(x) = g(x)$ pour une valeur de x choisie par l'utilisateur.

ligne 1 quand  est cliqué

ligne 2 demander Choisir un nombre et attendre

ligne 3 mettre image par f à $\text{réponse} + 2 * \text{réponse} + 2 - \text{réponse}$

ligne 4 mettre image par g à $\text{réponse} * 7 + 4$

ligne 5 si image par f = image par g alors

ligne 6 dire le nombre choisi est une solution de $f(x)=g(x)$ pendant 2 secondes

ligne 7 sinon

ligne 8 dire le nombre choisi n'est pas une solution de $f(x)=g(x)$ pendant 2 secondes

Elle décide de tester toutes les valeurs entières entre -5 et 3 .

- (a) Compléter sur le programme précédent, la ligne 4 du programme de Jane afin d'obtenir l'image par la fonction g du nombre choisi.
- (b) Quelle réponse donne le programme si le nombre choisi est 0 ?
- (c) En déduire une solution de l'équation $f(x) = g(x)$.
3. Morgane décide de résoudre cette équation par le calcul.
- (a) Démontrer que l'équation $f(x) = g(x)$ peut se ramener à l'équation $x^2 - 4x = 0$.
- (b) Factoriser l'expression $x^2 - 4x$.
- (c) En déduire les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$.
4. Dire pour chaque élève s'il a résolu l'équation $f(x) = g(x)$.
Expliquer pourquoi.

Correction

$$f(x) = (x + 2)^2 - x \quad \text{et} \quad g(x) = 7x + 4.$$

Partie A

1. $f(-4) = (-4 + 2)^2 - (-4) = 4 + 4 = 8.$
2. Il faut trouver x tel que $g(x) = 7x + 4 = 3$ ou $7x = -1$ et $x = -\frac{1}{7}.$

Donc $g\left(-\frac{1}{7}\right) = 3.$

Partie B

Trois élèves, Paul, Jane et Morgane, cherchent à résoudre l'équation $f(x) = g(x)$ par trois méthodes différentes.

1. Il calcule ainsi les images des entiers compris entre -3 et 3 par les fonctions f et g .

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		-3	-2	-1	0	1	2	3
2	$f(x)$	4	2	2	4	8	14	22
3	$g(x)$	-17	-10	-3	4	11	18	25

- (a) Il a écrit en B3 : $=7*B1+4$
- (b) Sur cette partie du tableur il voit que les images par f et g sont les mêmes (4) pour $x = 0$.

2. (a) ligne 1 quand  est cliqué

ligne 2 demander Choisir un nombre et attendre

ligne 3 mettre image par f ▼ à $\text{réponse} + 2 * \text{réponse} + 2 - \text{réponse}$

ligne 4 mettre image par g ▼ à $7 * \text{réponse} + 4$

ligne 5 si image par f = image par g alors

ligne 6 dire le nombre choisi est une solution de $f(x)=g(x)$ pendant 2 secondes

ligne 7 sinon

ligne 8 dire le nombre choisi n'est pas une solution de $f(x)=g(x)$ pendant 2 secondes

(b) Réponse : le nombre choisi est une solution de l'équation $f(x) = g(x)$.

(c) On retrouve que 0 est une solution de l'équation $f(x) = g(x)$ puisque, d'après la question précédente, $f(0) = g(0)$

3. (a) On a $f(x) = g(x)$ si et seulement si $(x + 2)^2 - x = 7x + 4$ ou en développant :
 $x^2 + 4x + 4 - x = 7x + 4$ ou encore $x^2 - 4x = 0$

(b) On a $x^2 - 4x = x(x - 4)$

(c) D'après le résultat précédent l'équation $x^2 - 4x = 0$ s'écrit

$x(x - 4) = 0$. Or le produit est nul si l'un des deux facteurs est nul soit :

$$\begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ x - 4 = 0 \end{cases} \text{ soit finalement } \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ x = 4 \end{cases}$$

L'équation a deux solutions : 0 et 4.

4. • Paul n'a pas trouvé toutes les solutions puisqu'il n'a cherché les solutions que parmi ceux qui sont entiers, de -3 à 3 .

• Jane a trouvé la solution 4 mais pas la solution 0 : elle n'aura jamais la certitude d'avoir trouvé toutes les solutions puisqu'il lui est impossible d'introduire dans le programme tous les nombres entiers.

• Morgane est certaine d'avoir trouvé toutes les solutions puisqu'elle a cherché les nombres solutions de l'équation $f(x) = g(x)$.