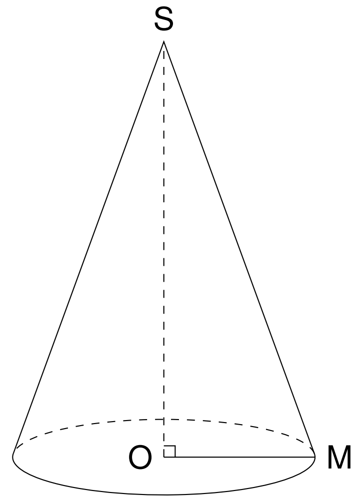
Les deux parties sont indépendantes.

Partie A

Léo veut fabriquer un chapeau en forme de cône pour se déguiser en sorcier lors de la fête d'Halloween.

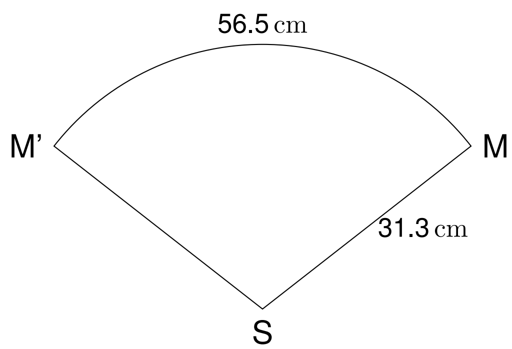
Voici la représentation de ce chapeau en perspective cavalière.

Le rayon OM de la base de ce cône mesure 9 cm et la hauteur OS mesure 30 cm.



1. Démontrer que la longueur MS, arrondie au dixième de centimètre, est 31.3 cm.
2. Léo souhaite vérifier que le chapeau sera adapté à son tour de tête qui mesure 56 cm.

   Les dimensions choisies pour concevoir le chapeau sont-elles adaptées au tour de tête de Léo ?
3. Léo a représenté ci-contre le patron de son chapeau.
   Il a reporté dessus les mesures des longueurs qu'il connaît et nommé $\mathrm{M'M}$ l'arc de cercle de longueur 56.5 cm.



   (a) Démontrer que la longueur du cercle de centre S et de rayon SM, arrondie au dixième de centimètre, est égale à 196.7 cm.

Pour dessiner en grandeur réelle son chapeau, il a besoin de calculer la mesure de l'angle $\widehat{\mathrm{M'SM}}$ qui est proportionnelle à la longueur de l'arc de cercle $\mathrm{M'M}$.

Il décide de représenter cette situation par le tableau de proportionnalité donné ci-dessous.

Mesure de l'angle $\widehat{\mathrm{M'SM}}$ (en degré)	360	...
Longueur de l'arc M'M (en centimètre) (Valeur arrondie au dixième de centimètre)	...	56,5

   (b) Placer la valeur 196,7 obtenue à la question précédente dans le tableau donné ci-dessus à rendre avec la copie.

   (c) Calculer la mesure de l'angle $\widehat{\mathrm{M'SM}}$ correspondant à une longueur d'arc de 56.5 cm qui permettra à Léo de tracer le patron de son chapeau. Donner le résultat arrondi au degré.

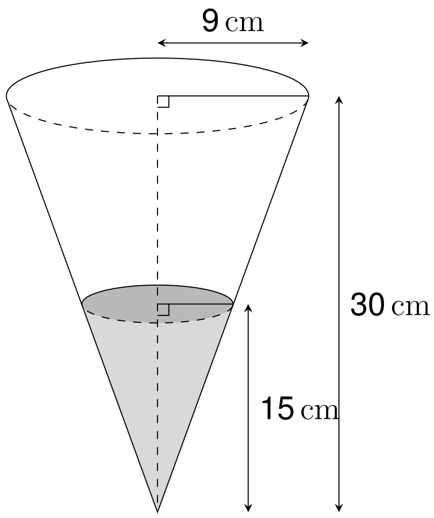
Partie B

On rappelle que la hauteur du chapeau mesure 30 cm.

1. Montrer que le volume total du chapeau, arrondi au cm3, est de 2,545 cm^3.

   On rappelle que la formule du volume d'un cône de rayon R et de hauteur h est :

   $$V = \frac{1}{3} \times (\pi \times R^2) \times h$$



2. Léo décide d'utiliser son chapeau pour transporter les bonbons qu'il a récoltés pendant la fête d'Halloween. En arrivant chez lui, il constate que les bonbons atteignent le milieu de la hauteur de son chapeau. Il estime que sa récolte de bonbons n'a pas été bonne car il pense que le volume occupé par les bonbons représente moins de 15 % du volume total de son chapeau. Son estimation est-elle correcte ?

Correction

Partie A

1. Le triangle SOM est un triangle rectangle en O, et donc, d'après le théorème de Pythagore, on a :
   $\mathrm{SM}^2 = \mathrm{SO}^2 + \mathrm{OM}^2 = 30^2 + 9^2 = 900 + 81 = 981.$
   Comme la longueur MS est positive, on en déduit : $\mathrm{SM} = \sqrt{981} \approx 31,32.$
   En arrondissant au dixième de centimètre, on a bien MS = 31.3 cm.

2. La base du cône est un cercle de rayon 9 cm, donc de circonférence :
   $\mathcal{C} = 2 \times \pi \times 9 = 18\pi \approx 56.55\,\mathrm{cm}.$
   Puisque son tour de tête mesure 56 cm, les dimensions choisies sont adaptées : la circonférence du cône est à peine plus grande que le tour de tête de Léo, donc le chapeau sera assez grand, mais pas trop grand.

3. (a) Puisque le cercle de rayon SM a un rayon de $31,3$, sa circonférence est de :
   $2\pi \times 31,3 \approx 196,66.$
   En arrondissant au dixième de centimètre, la longueur du cercle de centre S et de rayon SM, est bien égale à 196.7 cm.

   (b) Voici le tableau complété :

Mesure de l'angle $\widehat{\mathrm{M'SM}}$ (en degré)	360	103
Longueur de l'arc M′M (en centimètre) (Valeur arrondie au dixième de centimètre)	196,7	56,5

   (c) Calculons la mesure de l'angle, en utilisant le tableau de proportionnalité et un produit en croix :
   $\widehat{\mathrm{M'SM}} = \dfrac{360 \times 56,5}{196,7} = \dfrac{20340}{196,7} \approx 103,4\,.$
   Au degré près, l'angle correspondant à une longueur d'arc de 56.5 cm permettant à Léo de tracer le patron de son chapeau est de 103 .

Partie B

1. Le volume total du chapeau est donné par : $V_{\text{chapeau}} = \frac{1}{3} \times \pi \times 9^2 \times 30 = 810\pi \approx 2{,}544.7$.

   En arrondissant au cm^3, on a donc bien un volume total d'environ 2,545 cm^3.

2. Si les bonbons atteignent le milieu de la hauteur de son chapeau, cela signifie que la partie remplie de bonbons (celle qui est grisée sur la figure) est l'image du chapeau complet par une homothétie de rapport $\frac{1}{2}$, et de centre S, le sommet du chapeau.

   Une homothétie de rapport $\frac{1}{2}$ multiplie toutes les longueurs par $\frac{1}{2}$ et les volumes par $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} = 0,125$.

   Si le volume de bonbons est obtenu en multipliant le volume du chapeau par 0,125; cela signifie que le volume de bonbons est de 12,5 % du volume total de chapeau.

   Or $12,5\,\% < 15\,\%$.

   Il a donc raison dans son estimation : si la hauteur de bonbons n'atteint que la moitié de la hauteur du chapeau, alors le volume de bonbons est inférieur à 15 % du volume total de son chapeau.