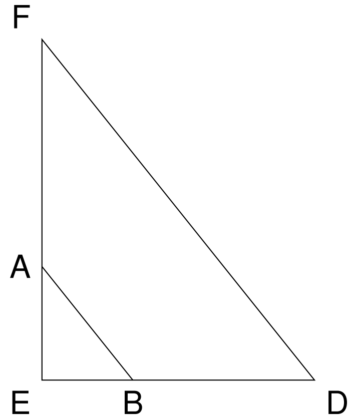
Sur la figure ci-contre :

- les points E, A et F sont alignés;
- les points E, B et D sont alignés;
- les droites (FD) et (AB) sont parallèles;
- $\mathrm{AE} = 4.4\,\mathrm{cm}$; $\mathrm{EB} = 3.3\,\mathrm{cm}$; $\mathrm{AB} = 5.5\,\mathrm{cm}$ et $\mathrm{BD} = 6.6\,\mathrm{cm}$.



La figure n'est pas en grandeur réelle

1. Démontrer que le triangle ABE est rectangle.
2. Calculer la mesure de l'angle $\widehat{\mathrm{ABE}}$, arrondie au degré.
3. Calculer la longueur FD.
4. Une homothétie de centre E transforme le triangle EAB en le triangle EFD.
   Quel est le rapport de cette homothétie ? Aucune justification n'est attendue.

Correction

1. Dans le triangle ABE, le côté le plus long est [AB].

   On a, d'une part : $\mathrm{AB}^2 = 5,5^2 = 30,25$.

   D'autre part : $\mathrm{AE}^2 + \mathrm{EB}^2 = 4,4^2 + 3,3^2 = 19,36 + 10,89 = 30,25$.

   On constate que : $\mathrm{AB}^2 = \mathrm{AE}^2 + \mathrm{EB}^2$.

   D'après la réciproque du théorème de Pythagore, on en déduit que le triangle AEB est rectangle en E, [AB] étant l'hypoténuse.

2. Dans le triangle AEB, rectangle en E, on a : $\cos\left(\widehat{\mathrm{ABE}}\right) = \dfrac{\mathrm{EB}}{\mathrm{AB}} = \dfrac{3,3}{5,5} = \dfrac{33}{55} = \dfrac{11 \times 3}{11 \times 5} = \dfrac{3}{5} = \dfrac{6}{10} = 0,6$.

   On en déduit : $\widehat{\mathrm{ABE}} \approx 53,1$ (obtenu à la calculatrice).

   La mesure de l'angle $\widehat{\mathrm{ABE}}$, arrondie au degré est donc de 53 .

3. Puisque les points E, A et F sont alignés, dans cet ordre, que les points E, B et D sont alignés dans le même ordre et que les droites (AB) et (FD) sont parallèles, d'après le théorème de Thalès, on sait que : $\dfrac{\mathrm{EB}}{\mathrm{ED}} = \dfrac{\mathrm{EA}}{\mathrm{EF}} = \dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{FD}}$.

   En particulier : $\dfrac{\mathrm{EB}}{\mathrm{ED}} = \dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{FD}}$.

   En remplaçant les longueurs connues : $\dfrac{3,3}{3,3+6,6} = \dfrac{5,5}{\mathrm{FD}}$

   Avec un produit en croix : $\mathrm{FD} = \dfrac{5,5 \times (3,3+6,6)}{3,3} = \dfrac{5,5 \times 9,9}{3,3} = 5,5 \times 3 = 16,5$.

   La longueur FD est donc de 16.5 cm.

4. Une homothétie de centre E transformant le triangle EAB en le triangle EFD transforme notamment le segment [EB] en [ED], comme les points B et D sont sur la même demi-droite d'extrémité E, le rapport de l'homothétie est positif, et il vaut :
$\frac{\mathrm{ED}}{\mathrm{EB}} = \frac{9,9}{3,3} = 3.$
Le rapport de cette homothétie est donc 3.