

Exercice 1

10 points

Le capitaine d'un navire possède un trésor constitué de 69 diamants, 1,150 perles et 4,140 pièces d'or.

1. Décomposer 69 ; 1,150 et 4,140 en produits de facteurs premiers.
2. Le capitaine partage équitablement le trésor entre les marins.

Combien y-a-t-il de marins sachant que toutes les pièces, perles et diamants ont été distribués ?

Exercice 2

19 points

Dans cet exercice, on donnera, si nécessaire, une valeur approchée des résultats au centième près.

Pour construire le décor d'une pièce de théâtre (Figure 1), Joanna dispose d'une plaque rectangulaire ABCD de 4 m sur 2 m dans laquelle elle doit découper les trois triangles du décor avant de les superposer. Elle propose un découpage de la plaque (Figure 2).

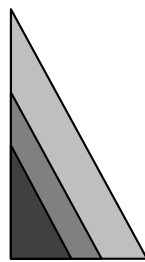


Figure 1

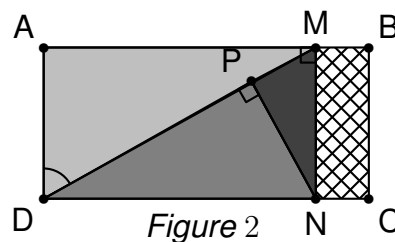


Figure 2

Le triangle ADM respecte les conditions suivantes :

- le triangle ADM est rectangle en A
- $AD = 2$ m
- $\widehat{ADM} = 60$

1. Montrer que $[AM]$ mesure environ 3,46 m.
2. La partie de la plaque non utilisée est représentée en quadrillé sur la figure 2.
Calculer une valeur approchée au centième de la proportion de la plaque qui n'est pas utilisée.
3. Pour que la superposition des triangles soit harmonieuse, Joanna veut que les trois triangles AMD, PNM et PDN soient semblables. Démontrer que c'est bien le cas.
4. Joanna aimerait que le coefficient d'agrandissement pour passer du triangle PDN au triangle AMD soit plus petit que 1,5. Est-ce le cas ? Justifier.

Exercice 3

17 points

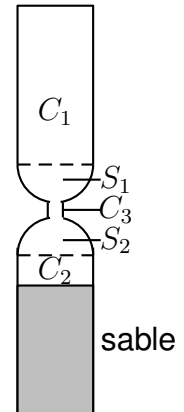
Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

Un sablier est composé de

- Deux cylindres C_1 et C_2 de hauteur 4,2 cm et de diamètre 1,5 cm
- Un cylindre C_3
- Deux demi-sphères S_1 et S_2 de diamètre 1,5 cm

On rappelle le volume V d'un cylindre d'aire de base B et de hauteur h :

$$V = B \times h.$$



- (a) Au départ, le sable remplit le cylindre C_2 aux deux tiers. Montrer que le volume du sable est environ $4,95 \text{ cm}^3$.
 - (b) On retourne le sablier. En supposant que le débit d'écoulement du sable est constant et égal à $1,98 \text{ cm}^3/\text{min}$, calculer le temps en minutes et secondes que va mettre le sable à s'écouler dans le cylindre inférieur.
- En réalité, le débit d'écoulement d'un même sablier n'est pas constant.

Dans une usine où on fabrique des sabliers comme celui-ci, on prend un sablier au hasard et on teste plusieurs fois le temps d'écoulement de ce sablier.

Voici les différents temps récapitulés dans le tableau suivant:

Temps mesuré	2 min 22 s	2 min 24 s	2 min 26 s	2 min 27 s	2 min 28 s	2 min 29 s	2 min 30 s
Nombre de tests	1	1	2	6	3	7	6

Temps mesuré	2 min 31 s	2 min 32 s	2 min 33 s	2 min 34 s	2 min 35 s	2 min 38 s
Nombre de tests	3	1	2	3	2	3

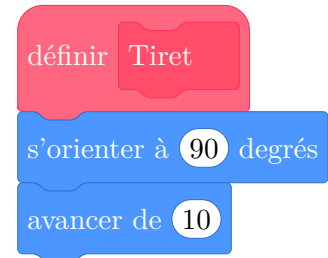
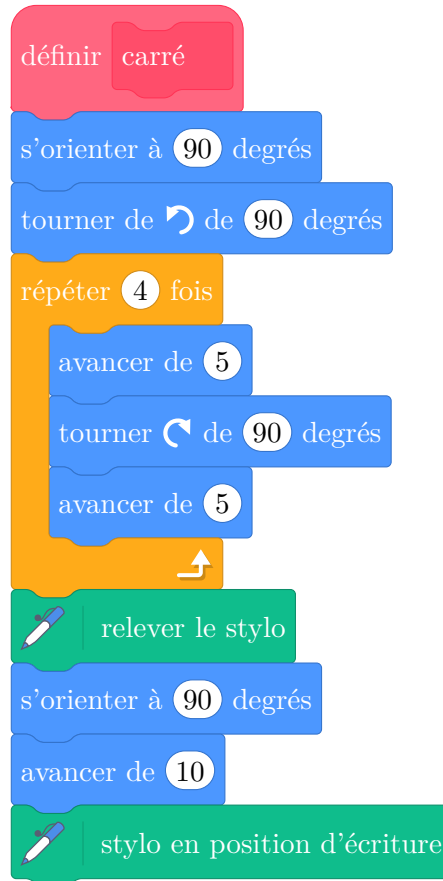
- Combien de tests ont été réalisés au total ?
- Un sablier est mis en vente s'il vérifie les trois conditions ci-dessous, sinon il est éliminé :
 - L'étendue des temps est inférieure à 20 s.
 - La médiane des temps est comprise entre 2 min 29 s et 2 min 31 s.
 - La moyenne des temps est comprise entre 2 min 28 s et 2 min 32 s.

Le sablier testé sera-t-il éliminé ?

EXERCICE 4

19 points

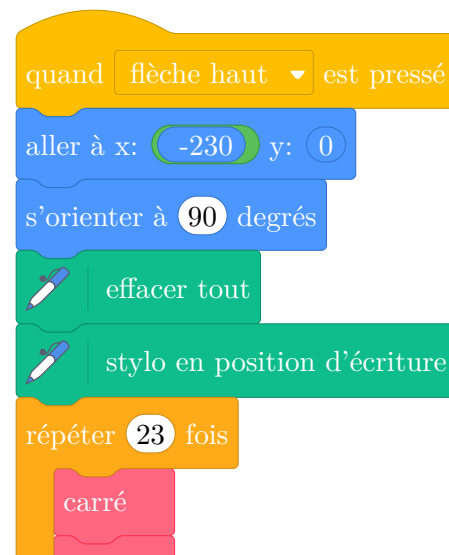
On veut réaliser un dessin constitué de deux types d'éléments (tirets et carrés) mis bout à bout. Chaque script ci-contre trace un élément, et déplace le stylo. On rappelle que s'orienter à 90 signifie qu'on oriente le stylo vers la droite.



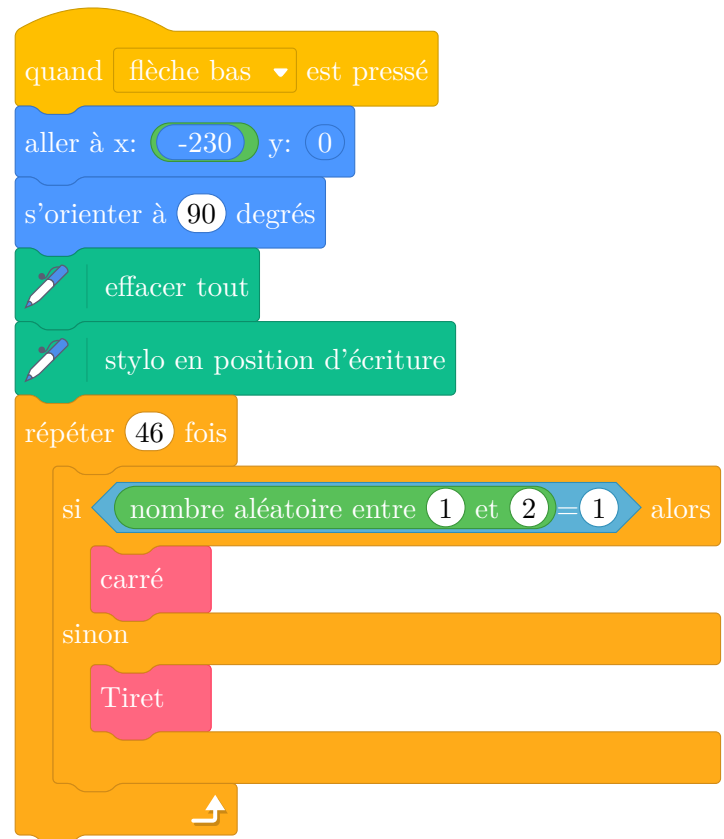
- En prenant 1 cm pour 2 pixels, représenter la figure obtenue si on exécute le script Carré. Préciser les positions de départ et d'arrivée du stylo sur votre figure.

Pour tracer le dessin complet, on a réalisé 2 scripts qui se servent des blocs Carré et Tiret . ci-dessus :

Script 1

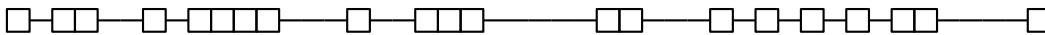


Script 2

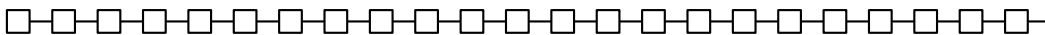


On exécute les deux scripts et on obtient les deux dessins ci-dessous.

Dessin A



Dessin B



2. Attribuer à chaque script la figure dessinée. Justifier votre choix.
3. On exécute le script 2.
 - (a) Quelle est la probabilité que le premier élément tracé soit un carré ?
 - (b) Quelle est la probabilité que les deux premiers éléments soient des carrés ?
4. Dans le script 2, on aimerait que la couleur des différents éléments, tirets ou carrés, soit aléatoire, avec à chaque fois 50 % de chance d'avoir un élément noir et 50 % de chance d'avoir un élément rouge.

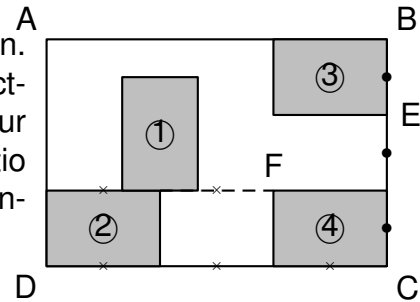
Écrire la suite d'instructions qu'il faut alors créer et préciser où l'insérer dans le script 2.

Indication : on pourra utiliser les instructions `mettre la couleur du stylo à rouge`

et `mettre la couleur du stylo à noir` pour choisir la couleur du stylo.

Exercice 5
18 points

Olivia s'est acheté un tableau pour décorer le mur de son salon. Ce tableau, représenté ci-contre, est constitué de quatre rectangles identiques nommés ①, ②, ③ et ④ dessinés à l'intérieur d'un grand rectangle ABCD d'aire égale à $1,215 \text{ m}^2$. Le ratio longueur : largeur est égal à 3 : 2 pour chacun des cinq rectangles.



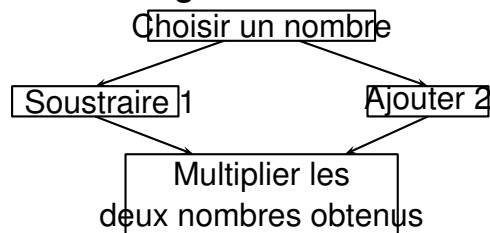
1. Recopier, en les complétant, les phrases suivantes. Aucune justification n'est demandée.
 - (a) Le rectangle ... est l'image du rectangle ... par la translation qui transforme C en E.
 - (b) Le rectangle ③ est l'image du rectangle ... par la rotation de centre F et d'angle 90° dans le sens des aiguilles d'une montre.
 - (c) Le rectangle ABCD est l'image du rectangle ... par l'homothétie de centre ... et de rapport 3.
(Il y a plusieurs réponses possibles, une seule est demandée.)
2. Quelle est l'aire d'un petit rectangle ?
3. Quelles sont la longueur et la largeur du rectangle ABCD ?

Exercice 6
17 points

Voici deux programmes de calcul :

Programme 1

Choisir un nombre
Le multiplier par 3
Ajouter 1

Programme 2


1. Vérifier que si on choisit 5 comme nombre de départ.
 - le résultat du programme 1 vaut 16.
 - le résultat du programme 2 vaut 28.

On appelle $A(x)$ le résultat du programme 1 en fonction du nombre x choisi au départ.

La fonction $B : x \mapsto (x - 1)(x + 2)$ donne le résultat du programme 2 en fonction du nombre x choisi au départ.

2. (a) Exprimer $A(x)$ en fonction de x .

- (b) Déterminer le nombre que l'on doit choisir au départ pour obtenir 0 comme résultat du programme 1.

3. Développer et réduire l'expression :

$$B(x) = (x - 1)(x + 2).$$

4. (a) Montrer que $B(x) - A(x) = (x + 1)(x - 3)$.
- (b) Quels nombres doit-on choisir au départ pour que le programme 1 et le programme 2 donnent le même résultat ? Expliquer la démarche.

Correction



Exercice 1

10 points

- On a $69 = 3 \times 23$,
 $1,150 = 115 \times 10 = 5 \times 23 \times 2 \times 5 = 2 \times 5^2 \times 23$, et
 $4,140 = 414 \times 10 = 6 \times 69 \times 10 = 2 \times 3 \times 3 \times 23 \times 2 \times 5 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 23$.
 La liste des nombres premiers commence par :
 2 3 5 7 11 13 17 19 23 29
- Le nombre de marins doit diviser 69, 1,150 et 4,140.
 Seul le facteur 23 est commun aux trois décompositions.
 Il y a donc 23 marins.

Exercice 2

19 points

- Dans ADM rectangle en A, on a $\tan \widehat{ADM} = \frac{\text{côté opposé à D}}{\text{côté adjacent à D}} = \frac{AM}{AD}$, soit $\tan(60) = \frac{AM}{2}$, d'où
 $AM = 2 \times \tan 60 \approx 3.464,1$ soit 3,46 m au centième près.
 [AM] mesure environ 3,46 m.
- Comme M appartient à [AB], on a $MB = AB - AM$, soit $MB \approx 4 - 3,46 \approx 0,54$.
 La proportion de plaque non utilisée est $\frac{MB}{AB} \approx 0,14$ au centième près.

3. Comme dans un triangle la somme des angles est égale à 180, on a dans AMD, un angle de 90 en A, un angle de 60 en D et un angle de 30 en M.

Dans le triangle DPN rectangle en P, on a donc un angle de 90 en P. De plus, son angle en D mesure $90 - 60$, soit 30.

Le triangle DPN ayant deux angles de 90 et 30 comme le triangle ADM, ces deux triangles sont semblables.

Dans le triangle MPN rectangle en P, on a donc un angle de 90 en P. De plus, son angle en M mesure $90 - 30$, soit 60.

Le triangle MPN ayant deux angles de 90 et 60 comme le triangle ADM, ces deux triangles sont semblables.

Les trois triangles AMD, PNM et PDN sont semblables.

Deux triangles sont semblables si deux angles de l'un des triangles ont les mêmes mesures que deux angles de l'autre triangle.

4. Les triangles DNP et ADM sont semblables.

Le rapport d'agrandissement pour passer de DNP à ADM est par exemple, le rapport $\frac{DM}{DN}$ des hypoténuses.

On a $DN = AM \approx 3,46$.

Dans ADM rectangle en A, on a $\cos \widehat{ADM} = \frac{AD}{DM}$, soit $\cos 60 = \frac{2}{DM}$.

On a donc $\cos 60 \times DM = 2$, soit $DM = \frac{2}{\cos 60}$.

On a $DM = 4$. Le rapport d'agrandissement est $\frac{4}{3,46}$, soit environ 1,16.

Il est donc inférieur à 1,5.

Exercice 3

17 points

1. (a) Le diamètre de C_2 est 1,5 cm. Son rayon est donc $\frac{1,5}{2} = 0,75$ cm.

L'aire B de sa base est $\pi \times r^2 = \pi \times 0,75^2$.

Son volume est $V = B \times h = \pi \times 0,75^2 \times 4,2$.

Le volume de sable est $\frac{2}{3} \times \pi \times 0,75^2 \times 4,2$, soit environ 4,95 cm³.

L'aire d'un disque de rayon r est $\pi \times r^2$.

- (b) On a : volume = vitesse d'écoulement $\times$ temps.

Donc le temps d'écoulement est $\frac{\text{volume}}{\text{vitesse d'écoulement}} = \frac{4,95}{1,98} = 2,5$.

Le temps d'écoulement est 2,5 minutes, soit 2 minutes 30 secondes.

2. (a) On a : $1 + 1 + 2 + 6 + 3 + 7 + 6 + 3 + 1 + 2 + 3 + 2 + 3 = 40$.
On a effectué 40 tests.
- (b) • La plus grande valeur est 2 min 38 s et le plus petite est 2 min 22 s.
La différence (étendue de la série) est de 16 secondes, inférieure à 20 s.
- La médiane est la moyenne entre la 20^e valeur de la série ordonnée et la 21^e valeur.
Or, on a $1 + 1 + 2 + 6 + 3 + 7 = 20$, donc la 20^e valeur est 2 min 29 s et la 21^e est 2 min 30 s.
La médiane est bien comprise entre 2 min 29 s et 2 min 31 s.
- Comme tous les temps commencent par 2 min, il suffit de faire la moyenne des secondes en faisant :
- $$\frac{1 \times 22 + 1 \times 24 + \dots + 2 \times 35 + 3 \times 38}{40} = \frac{1,204}{40} = 30,1.$$
- Le temps moyen d'écoulement est 2 min 30,1 s.
– La moyenne est entre 2 min 28 s et 2 min 32 s.
– Le sablier testé ne sera pas rejeté.

Exercice 4

19 points

- Le script carré trace un carré en traçant 4 fois deux demi-côtés de 5 pixels, donc chaque côté du carré correspond à 10 pixels, donc à 5 cm.
- Le script 1 dessine 23 fois un carré suivi d'un tiret, donc le dessin B.
Le script 2 dessine 46 fois de manière aléatoire un carré ou un tiret, donc le dessin A.
- (a) En exécutant le script 2, le premier élément tracé est un carré si le nombre aléatoire prend l'un des deux valeurs possible. La probabilité est 0,5.
(b) Pour les deux premiers éléments dessinés, il y a 4 possibilités équiprobables :
carré carré ; carré tiret ; tiret carré ; tiret tiret.
La probabilité que les deux premiers éléments dessinés soient des carrés est $\frac{1}{4}$, soit 0,25.
- Au niveau de la ligne 7 du script 2, on peut insérer :
si nombre aléatoire entre 1 et 2 = 1 alors mettre la couleur du stylo à rouge sinon
mettre la couleur du stylo à noir.

Exercice 5

18 points

- (a) Le rectangle ③ est l'image du rectangle ④ par la translation qui transforme C en E.
(b) Le rectangle ③ est l'image du rectangle ① par la rotation de centre F et d'angle 90 dans le sens des aiguilles d'une montre.

- (c) Le rectangle ABCD est l'image du rectangle ② par l'homothétie de centre D et de rapport 3, ou bien, le rectangle ABCD est l'image du rectangle ③ par l'homothétie de centre B et de rapport 3, ou bien, le rectangle ABCD est l'image du rectangle ④ par l'homothétie de centre C et de rapport 3.
2. Un petit rectangle est donc une réduction du grand rectangle de rapport $\frac{1}{3}$.
- Son aire est : aire du grand $\times \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1,215 \times \frac{1}{9} = 0,135 \text{ m}^2$.
- Dans une réduction de rapport k , les aires sont multipliées par k^2 .
3. Soit ℓ la largeur et L la longueur du rectangle ABCD.
- Le ratio longueur : largeur étant égal à 3 : 2, on a $2L = 3\ell$, soit $L = 1,5\ell$.
- On veut $\ell \times L = 1,215$, soit successivement :
- $$\ell \times 1,5\ell = 1,215 ; 1,5\ell^2 = 1,215 ; \ell^2 = \frac{1,215}{1,5} = 0,81 ; \text{d'où } \ell = 0,9.$$
- On a alors $L = 1,5 \times 0,9 = 1,35$.
- Le rectangle ABCD mesure 0,9 m sur 1,35 m.

Exercice 6

17 points

1. Avec le programme 1, on a :
- $$5 \rightarrow 3 \times 5 = 15 \rightarrow 15 + 1 = 16$$
- Le résultat du programme 1 vaut 16.
- Avec le programme 1, on a :
- $$5 \rightarrow 5 - 1 = 4 \text{ (à gauche) et } 5 + 2 = 7 \text{ (à droite)} \rightarrow 4 \times 7 = 28.$$
- Le résultat du programme 2 vaut 28.
2. (a) Pour le programme 1, on a $x \rightarrow 3x \rightarrow 3x + 1$, donc on a $A(x) = 3x + 1$.
- (b) On veut $A(x) = 0$, ce qui donne successivement :
- $$3x + 1 = 0 ; 3x = 0 - 1 ; 3x = -1 ; x = -\frac{1}{3}.$$
- On doit choisir $-\frac{1}{3}$ au départ pour obtenir 0 comme résultat du programme 1.
3. $B(x) = (x - 1)(x + 2) = x^2 + 2x - x - 2 = x^2 + x - 2$.
4. (a) On a :
- $$B(x) - A(x) = x^2 + x - 2 - (3x + 1) = x^2 + x - 2 - 3x - 1 = x^2 - 2x - 3 \text{ et } (x + 1)(x - 3) = x^2 - 3x + x - 3 = x^2 - 2x - 3.$$
- On a bien $B(x) - A(x) = (x + 1)(x - 3)$.

- (b) On veut $B(x) = A(x)$, soit $B(x) - A(x) = 0$ ou encore $(x + 1)(x - 3) = 0$, soit $x + 1 = 0$ ou $x - 3 = 0$.
On a donc $x = -1$ ou $x = 3$.

Il faut choisir -1 ou 3 au départ pour que le programme 1 et le programme 2 donnent le même résultat.