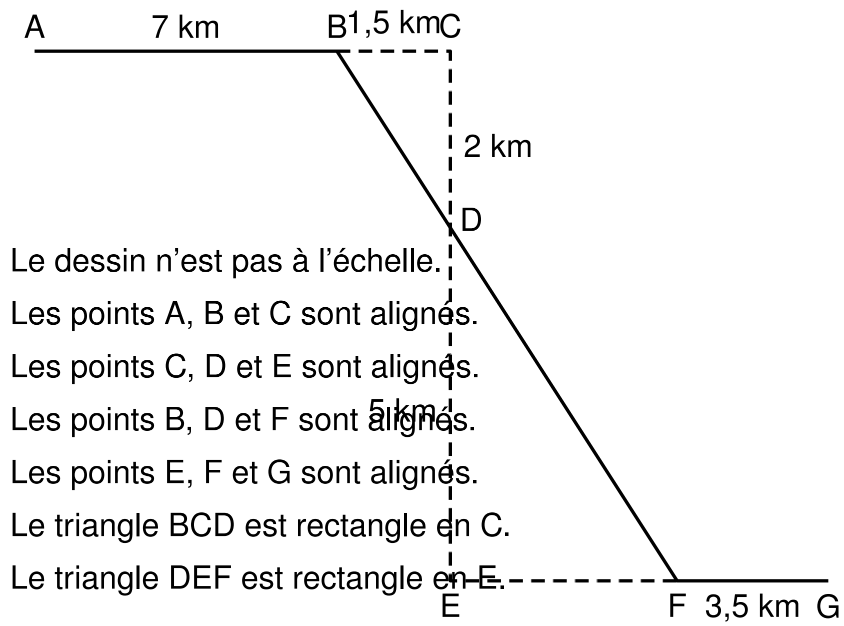
Exercice 1 **18 points**

Michel participe à un rallye VIT sur un parcours balisé. Le trajet est représenté en traits pleins.
Le départ du rallye est en A et l'arrivée est en G.



Le dessin n'est pas à l'échelle.

Les points A, B et C sont alignés.

Les points C, D et E sont alignés.

Les points B, D et F sont alignés.

Les points E, F et G sont alignés.

Le triangle BCD est rectangle en C.

Le triangle DEF est rectangle en E.

1. Montrer que la longueur BD est égale à $2,5$ km.
2. Justifier que les droites (BC) et (EF) sont parallèles.
3. Calculer la longueur DF.
4. Calculer la longueur totale du parcours.
5. Michel roule à une vitesse moyenne de 16 km/h pour aller du point A au point B.
   Combien de temps mettra-t-il pour aller du point A au point B ?
   Donner votre réponse en minutes et secondes.

Exercice 2 **14 points**

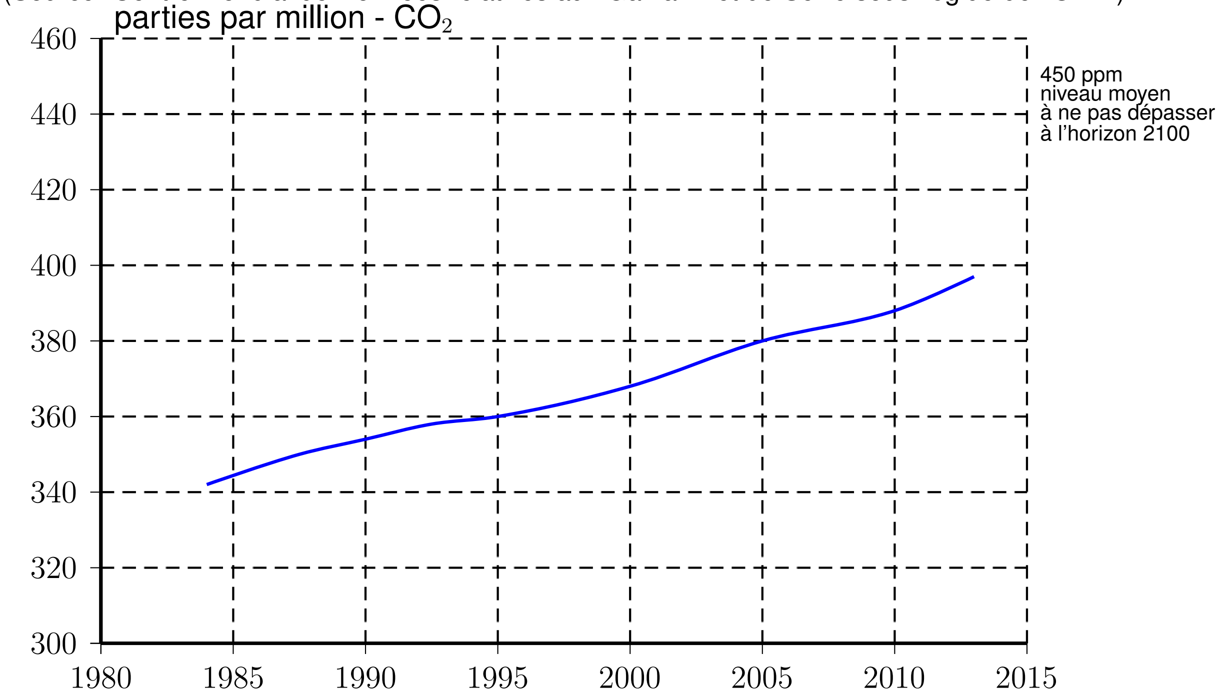
1. (a) Déterminer la décomposition en produit de facteurs premiers de 2,744.
   (b) En déduire la décomposition en produit de facteurs premiers de $2{,}744^2$.
   (c) À l'aide de cette décomposition, trouver x tel que $x^3 = 2{,}744^2$.
2. Soient a et b deux nombres entiers supérieurs à 2 tels que $a^3 = b^2$.
   (a) Calculer b lorsque $a = 100$.
   (b) Déterminer deux nombres entiers a et b supérieurs à 2 et inférieurs à 10 qui vérifient l'égalité $a^3 = b^2$.

Exercice 3 **17 points**

Les activités humaines produisent du dioxyde de carbone (CO_2) qui contribue au réchauffement climatique. Le graphique suivant représente l'évolution de la concentration atmosphérique moyenne en CO_2 (en ppm) en fonction du temps (en année).

Concentration de CO_2 atmosphérique

(Source: Centre Mondial de Données relatives aux Gaz à Effet de Serre sous l'égide de l'OMM)



1 ppm de CO_2 = 1 partie par million de CO_2 = 1 milligramme de CO_2 par kilogramme d'air.

1. Déterminer graphiquement la concentration de CO_2 en ppm en 1995 puis en 2005.
2. On veut modéliser l'évolution de la concentration de CO_2 en fonction du temps à l'aide d'une fonction g où $g(x)$ est la concentration de CO_2 en ppm en fonction de l'année x.
   (a) Expliquer pourquoi une fonction affine semble appropriée pour modéliser la concentration en CO_2 en fonction du temps entre 1995 et 2005.
   (b) Arnold et Billy proposent chacun une expression pour la fonction g :
   Arnold propose l'expression $g(x) = 2x - 3{,}630$;
   Billy propose l'expression $g(x) = 2x - 2{,}000$.
   Quelle expression modélise le mieux l'évolution de la concentration de CO_2 ? Justifier.
   (c) En utilisant la fonction que vous avez choisie à la question précédente, indiquer l'année pour laquelle la valeur de 450 ppm est atteinte.
3. En France, les forêts, grâce à la photosynthèse, captent environ 70 mégatonnes de CO_2 par an, ce qui représente $15\,\%$ des émissions nationales de carbone (année 2016).

   Calculer une valeur approchée à une mégatonne près de la masse M du CO_2 émis en France en 2016.

Exercice 4 **16 points**

Pour le mariage de Dominique et Camille, le pâtissier propose deux pièces montées constituées de gâteaux de tailles et de formes différentes.

La tour de Pise : La première pièce montée est constituée d'un empilement de 4 gâteaux de forme cylindrique, de même hauteur et dont le diamètre diminue de 8 cm à chaque étage. Le gâteau du bas a pour diamètre 30 cm et pour hauteur 6 cm.	
La tour Carrée : La deuxième pièce montée est constituée d'un empilement de 3 pavés droits à base carrée de même hauteur. La longueur du côté de la base diminue de 8 cm à chaque étage. La hauteur des gâteaux est 8 cm ; le côté de la base du gâteau du bas mesure 24 cm.	

Tous les gâteaux ont été confectionnés à partir de la recette ci-dessous qui donne la quantité des ingrédients correspondant à 100 g de chocolat.

Recette du gâteau pour 100 g de chocolat :	• 65 g de sucre • 2 oeufs • 75 g de beurre • 30 g de farine

1. Quel est le ratio (masse de beurre : masse de chocolat) ? Donner le résultat sous forme de fraction irréductible.
2. Calculer la quantité de farine nécessaire pour 250 g de chocolat noir suivant la recette ci-dessus.
3. Calculer la longueur du côté de la base du plus petit gâteau de la tour Carrée.
4. Quelle est la tour qui a le plus grand volume ? Justifier votre réponse en détaillant les calculs.

On rappelle que le volume V d'un cylindre de rayon r et de hauteur h est donné par la formule:

$$V = \pi \times r^2 \times h.$$

Exercice 5 **15 points**

On donne le programme de calcul suivant :

Étape 1 :	Choisir un nombre de départ
Étape 2 :	Ajouter 6 au nombre de départ
Étape 3 :	Retrancher 5 au nombre de départ
Étape 4 :	Multiplier les résultats des étapes 2 et 3
Étape 5 :	Ajouter 30 à ce produit
Étape 6 :	Donner le résultat

1. (a) Montrer que si le nombre choisi est 4, le résultat est 20.
   (b) Quel est le résultat quand on applique ce programme de calcul au nombre -3 ?
2. Zoé pense qu'un nombre de départ étant choisi, le résultat est égal à la somme de ce nombre et de son carré.
   (a) Vérifier qu'elle a raison quand le nombre choisi au départ vaut 4, et aussi quand on choisit -3.
   (b) Ismaël décide d'utiliser un tableur pour vérifier l'affirmation de Zoé sur quelques exemples.

B6			$=$ B1 $+$ B1ˆ			
	A	B	C	D	E	F
1	Étape 1	2	5	7	10	20
2	Étape 2	8	11	13	16	26
3	Étape 3	-3	0	2	5	15
4	Étape 4	-24	0	26	80	390
5	Étape 5 (résultat)	6	30	56	110	420
6	Somme du nombre et de son carré	6	30	56	110	420

   Il a écrit des formules en B2 et B3 pour exécuter automatiquement les étapes 2 et 3 du programme de calcul.
   Quelle formule à recopier vers la droite a-t-il écrite dans la cellule B4 pour exécuter l'étape 4 ?
   (c) Zoé observe les résultats, puis confirme que pour tout nombre x choisi, le résultat du programme de calcul est bien $x^2 + x$. Démontrer sa réponse.
   (d) Déterminer tous les nombres pour lesquels le résultat du programme est 0.

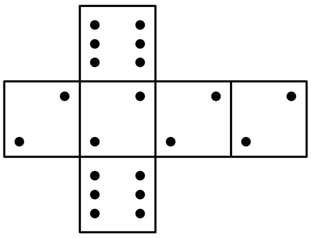
Exercice 6 **20 points**

Deux amis Armelle et Basile jouent aux dés en utilisant des dés bien équilibrés mais dont les faces ont été modifiées. Armelle joue avec le dé A et Basile joue avec le dé B.

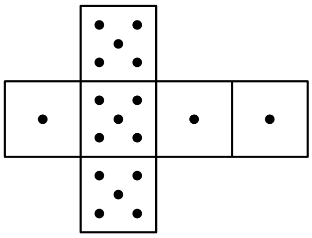
Lors d'une partie, chaque joueur lance son dé et celui qui obtient le plus grand numéro gagne un point.

Voici les patrons des deux dés:

Patron du dé A



Patron du dé B

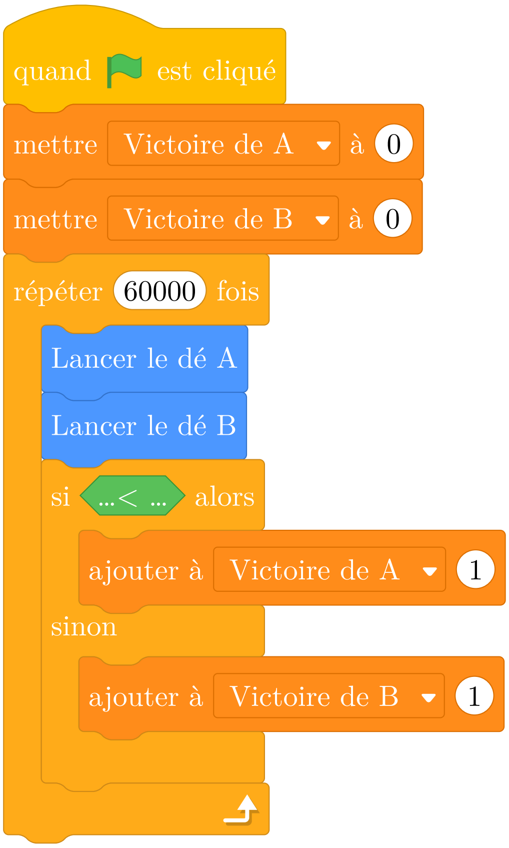


1. Une partie peut-elle aboutir à un match nul ?
2. (a) Si le résultat obtenu avec le dé A est 2, quelle est la probabilité que Basile gagne un point ?
   (b) Si le résultat obtenu avec le dé B est 1, quelle est la probabilité qu'Armelle gagne un point?

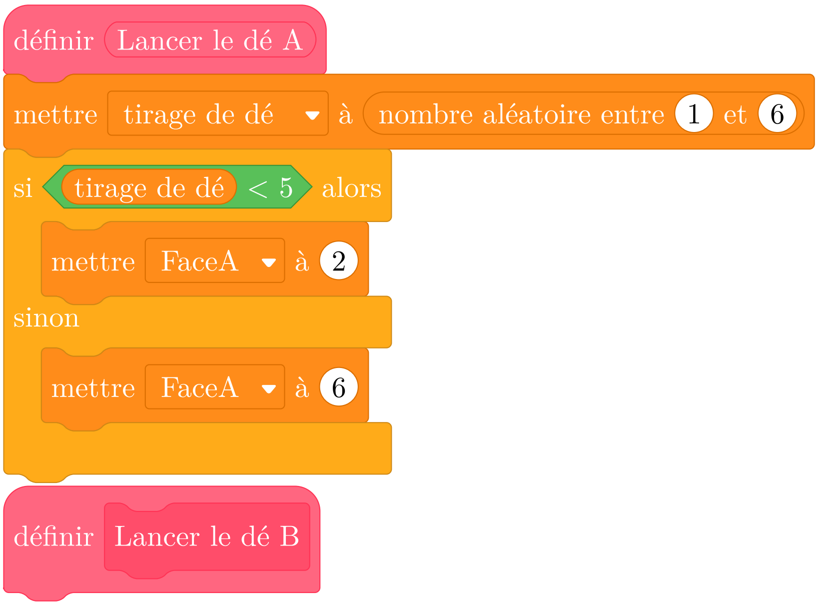
Les joueurs souhaitent comparer leur chance de gagner. Ils décident de simuler un match de soixante mille duels à l'aide d'un programme informatique.

Voici une partie du programme qu'ils ont réalisé.

Programme principal



Sous-programmes



On précise que l'expression (**nombre aléatoire entre 1 et 6**) renvoie de manière équiprobable un nombre pouvant être 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ou 6.

Les variables FaceA et FaceB enregistrent les résultats des dés A et B. Par exemple, la variable FaceA peut prendre soit la valeur 2 soit la valeur 6, puisque ce sont les seuls nombres présents sur le dé A.

Les variables Victoire de A et Victoire de B comptent les victoires des joueurs.

3. (a) Lorsqu'on exécute le sous-programme Lancer le dé A , quelle est la probabilité que la variable FaceA prenne la valeur 2 ?
   (b) Recopier la ligne 7 du programme principal en la complétant.
   (c) Rédiger un sous-programme Lancer le dé B qui simule le lancer du dé B et enregistre le nombre obtenu dans la variable FaceB.
4. Après exécution du programme principal, on obtient les résultats suivants:

   Victoire de A$= 39{,}901$ *Victoire de A*$= 20{,}099$

   (a) Calculer la fréquence de gain du joueur A, exprimée en pourcentage. On donnera une valeur approchée à 1 % près.
   (b) Conjecturer la probabilité que A gagne contre B.

Correction

Exercice 1 **18 points**

1. Le triangle BCD est rectangle en C. Le théorème de Pythagore permet d'écrire :

   $\text{BD}^2 = \text{BC}^2 + \text{CD}^2$, soit $\text{BD}^2 = 1,5^2 + 2^2 = 2,25 + 4 = 6,25 = 2,5^2$.

   Donc $\text{BD} = 2,5$ km.

2. C, D et E sont alignés ; le triangle BCD est rectangle en C, donc la droite (BC) est perpendiculaire à la droite (CE).

   Le triangle DEF est rectangle en E, donc la droite (EF) est perpendiculaire à la droite (CE).

   Conclusion : les droites (BC) et (EF) étant perpendiculaires à la droite (CE) sont parallèles.

3. D'après le résultat précédent on peut appliquer le théorème de Thalès :
   $\dfrac{\text{DF}}{\text{DB}} = \dfrac{\text{DE}}{\text{DC}} = \dfrac{\text{EF}}{\text{BC}}$, soit
   $\dfrac{\text{DF}}{2{,}5} = \dfrac{5}{2}$, d'où en multipliant chaque membre par 2,5 :
   $\text{DF} = 2,5 \times 2,5 = 6,25$ km.

4. La longueur totale du parcours est égale à :

   $\text{AB} + \text{BD} + \text{DF} + \text{FG} = 7 + 2,5 + 6,25 + 3,5 = 19,25$ km.

5. Michel parcourt 16 km en 60 min ou 4 km en 15 min ou 1 km en $\dfrac{15}{4}$ min.

   Pour parcourir 7 km, il mettra donc $7 \times \dfrac{15}{4} = \dfrac{105}{4}$ min soit $\dfrac{105}{4} \times 60 = 1{,}575$ s soit 26 min 15 s.

Exercice 2 **14 points**

1. (a) 2,744 est multiple de 4 : $2{,}744 = 4 \times 686 = 4 \times 2 \times 343$.
   Or $343 = 350 - 7 = 7 \times 50 - 7 \times 1 = 7 \times 49 = 7 \times 7 \times 7$.
   Donc $2{,}744 = 2^3 \times 7^3$.
   (b) Le résultat précédent entraîne :
   $2{,}744^2 = \left(2^3 \times 7^3\right)^2 = \left(2^3\right)^2 \times \left(7^3\right)^2 = 2^6 \times 7^6$.
   (c) Inversement le résultat précédent peut s'écrire :
   $2{,}744^2 = 2^6 \times 7^6 = \left(2^2\right)^3 \times \left(7^2\right)^3 = \left(2^2 \times 7^2\right)^3 = (4 \times 49)^3 = 196^3$.
2. (a) On a donc$100^3 = b^2$ ou $1{,}000{,}000 = b^2$, d'où $b = 1{,}000$.
   (b)
   - Si $a = 3,\ a^3 = 27$ qui n'est pas un carré ;
   - Si $a = 4,\ a^3 = 64$ qui est le carré de 8 ;
   - Si $a = 5,\ a^3 = 125$ qui n'est pas un carré ;
   - Si $a = 6,\ a^3 = 216$ qui n'est pas un carré ;
   - Si $a = 7,\ a^3 = 343$ qui n'est pas un carré ;
   - Si $a = 8,\ a^3 = 512$ qui n'est pas un carré ;
   - Si $a = 9,\ a^3 = 729$ qui est le carré de 27, mais $27 > 10$.

   Il y a donc une solution : $4^3 = 8^2$.

Exercice 3 **17 points**

1. On lit sur le graphique :
   - en 1995 : 360 ppm ;
   - en 2005 : 380 ppm.
2. (a) Les points de la courbe sont à peu près alignés : le modèle affine semble donc pertinent.
   (b) Pour l'année 1995, l'expression de'Arnold donne $2 \times 1{,}995 - 3{,}630 = 360$, et celle de Billy $2 \times 1995 - 2{,}000 = 1{,}990$: ce dernier résultat est complètement erroné.
   Il vaut mieux prendre l'expression d'Arnold.
   (c) Il faut résoudre l'équation :
   $2x - 3{,}630 = 450$ soit $2x = 4{,}080$ et $x = 2{,}040$.
   La valeur de 450 ppm sera atteinte en 2040.
3. Si en 2016, 70 mégatonnes représentent 15 % des émissions M de carbone, alors :
   $\dfrac{15}{100} \times M = 70$, soit $M = \dfrac{70 \times 100}{15} \approx 466,6$, soit 467 mégatonnes de CO_2 à la mégatonne près.

Exercice 4 **16 points**

1. Le ratio est égal à $\dfrac{75}{100} = \dfrac{3\times 25}{4\times 25} = \dfrac{3}{4}$.
2. On a $250 = 2,5\times 100$: il faut donc multiplier les quantités par $2,5$. En particulier il faudra $30\times 2,5 = 3\times 25 = 75$ g de farine.
3. Le plus petit gâteau carrée a une base carré de côté : $24 - 8 - 8 = 8$ cm.
4.
   - Volume de tour de Pise :
     $\pi\times 15^2\times 6+\pi\times 11^2\times 6+\pi\times 7^2\times 6+\pi\times 3^2\times 6 = 6\pi\left(15^2+11^2+7^2+3^2\right) = 6\pi(225+121+49+9) = 6\pi\times 404 = 2{,}424\pi \approx 7{,}615$ cm^3.
   - Volume de tour Carrée :
     $24^2\times 8+16^2\times 8+8^2\times 8 = 8\times\left(24^2+16^2+8^2\right) = 8\times 896 = 7{,}168$ cm^3.
     C'est la tour de Pise qui a le plus grand volume.

Exercice 5 **15 points**

1. (a) On obtient successivement :
   $4 \to 10 \to 10\times(4-5) = -10 \to 20$.
   (b) On obtient successivement :
   $-3 \to 3 \to 3\times(-3-5) = -24 \to 6$.
2. (a) On a effectivement $4+4^2 = 4+16 = 20$ et $-3+(-3)^2 = -3+9 = 6$ trouvés précédemment.
   (b) =B2*B3
   (c) En partant de x on obtient :
   $x \to x+6 \to (x+6)(x-5) \to (x+6)(x-5)+30 = x^2-5x+6x-30+30 = x^2+x$.
   (d) Il faut résoudre l'équation :
   $x+x^2 = 0$ ou $x(1+x) = 0$ soit $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 0\\ 1+x & = & 0\end{array}\right.$ soit enfin $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 0\\ x & = & -1\end{array}\right.$
   0 et -1 donnent 0 par le programme de calcul.

Exercice 6 **20 points**

1. Armelle peut tirer 2 ou 6 et Basile 1 ou 5 : il ne peut y avoir égalité, donc de match nul.
2. (a) Basile a $\dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$ chances de sortir un 5 donc de battre Armelle.
   (b) Dans tous les cas Armelle tire un 2 un 6 et tous les deux sont supérieurs à 1 : sa probabilité de battre Basile est donc égale à 1.
3. (a) Il y a $\dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$ de chances que le nombre tiré soit inférieur à 5 donc que FaceA prenne la valeur 2.
   (b) Si FaceB < FaceA alors

(c) C'est le même sous-programme que Lancer le dé A en remplaçant Lancer le dé A par Lancer le dé B, 5 par 4 (troisième ligne), 2 par 1 (quatrième ligne) et 6 par 5 (cinquième ligne).

4. (a) La fréquence de victoires de A est égale à $\dfrac{39{,}901}{39{,}901 + 20{,}099} = \dfrac{39{,}901}{60{,}000} \approx 0,665$, soit 66,5 % à 0,1 près

(b) La probabilité que A gagne contre B est d'environ 66,666 % soit 2 chances sur 3.