EXERCICE 1 20 points

Source : Manuel Sésamath 3e sous licence GnuFDL 1.1

Une famille se promène au bord d'une rivière.

Les enfants aimeraient connaître la largeur de cette rivière.

Ils prennent des repères, comptent leurs pas et dessinent le schéma ci-dessous sur lequel les points C, E et D, de même que A, E et B sont alignés. (Le schéma n'est pas à l'échelle).

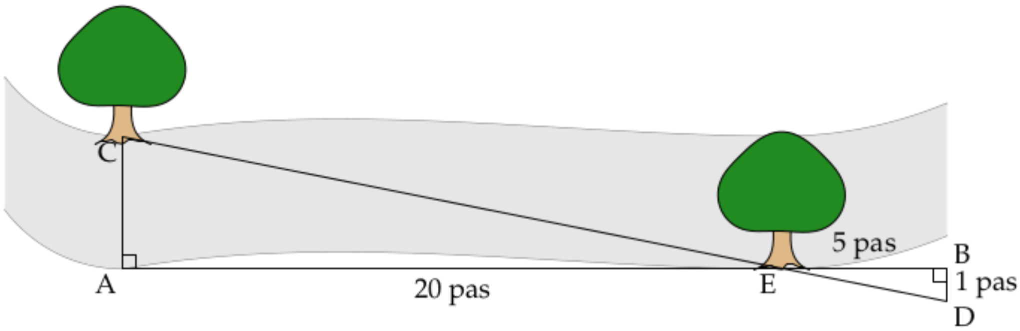


Illustration de Christophe Poulain

1. Démontrer que les droites (AC) et (BD) sont parallèles.

2. Déterminer, en nombre de pas, la largeur AC de la rivière.

Pour les questions qui suivent, on assimile la longueur d'un pas à 65 cm.

3. Montrer que la longueur CE vaut $13,3$ m, en arrondissant au décimètre près.

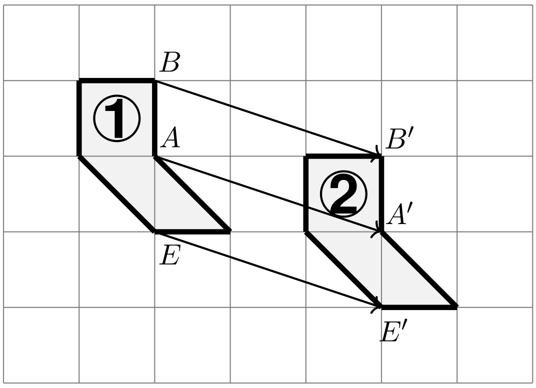
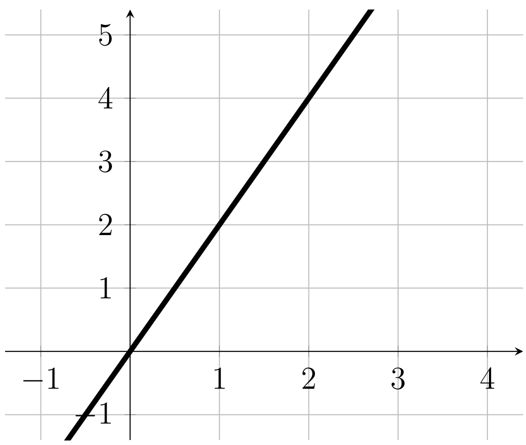
4. L'un des enfants lâche un bâton dans la rivière au niveau du point E. Avec le courant, le bâton se déplace en ligne droite en 5 secondes jusqu'au point C.

   (a) Calculer la vitesse du bâton en m/s.

   (b) Est-il vrai que Le bâton se déplace à une vitesse moyenne inférieure à 10 km/h ?

EXERCICE 2 20 points

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM).
Aucune justification n'est demandée.
Pour chaque question, trois réponses (A, B et C) sont proposées.
Une seule réponse est exacte.
Recopier sur la copie le numéro de la question et la réponse.

Questions	Réponse A	Réponse B	Réponse C
1. On considère les deux figures suivantes Par quelle transformation la figure 2 est-elle l'image de la figure 1 ? 	Une translation	Une homothétie	Une symétrie axiale
2. On considère la représentation graphique de la fonction g suivante :  Quel est l'antécédent de 2 par la fonction g ?	2	1	4
3. Soit f la fonction définie par : $f : x \longmapsto 3x^2 - 7$ Quelle affirmation est correcte ?	29 est l'image de 2 par la fonction f.	$f(3) = 20$	f est une fonction affine.
4. On a relevé les performances, en mètres, obtenues au lancer du poids par un groupe de 13 élèves d'une classe. 3,41 m ; 5,25 m ; 5,42 m ; 4,3 m ; 6,11 m ; 4,28 m ; 5,15 m ; 3,7 m ; 6,07 m ; 5,82 m ; 4,62 m ; 4,91 m ; 4,01	7	4,91	5,15

EXERCICE 3 20 points

Une collectionneuse compte ses cartes Pokémon afin de les revendre.
Elle possède 252 cartes de type *feu* et 156 cartes de type *terre*.

1. (a) Parmi les trois propositions suivantes, laquelle correspond à la décomposition en produit de facteurs premiers du nombre 252 ?

Proposition 1	Proposition 2	Proposition 3
$2^2 \times 9 \times 7$	$2 \times 2 \times 3 \times 21$	$2^2 \times 3^2 \times 7$

   (b) Donner la décomposition en produit de facteurs premiers du nombre 156.

2. Elle veut réaliser des paquets identiques, c'est-à-dire contenant chacun le même nombre de cartes *terre* et le même nombre de cartes *feu* en utlisant toutes les cartes.
   (a) Peut-elle faire 36 paquets ?
   (b) Quel est le nombre maximum de paquets qu'elle peut réaliser ?
   (c) Combien de cartes de chaque type contient alors chaque paquet ?

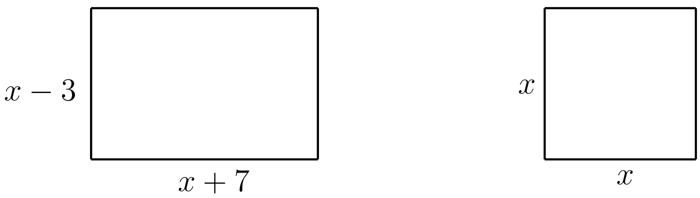
3. Elle choisit une carte au hasard parmi toutes ses cartes. On suppose les cartes indiscernables au toucher.

   Calculer la probabilité que ce soit une carte de type *terre*.

EXERCICE 4 20 points

Dans cet exercice, x est un nombre strictement supérieur à 3.
On s'intéresse aux deux figures géométriques dessinées ci-dessous :

- un rectangle dont les côtés ont pour longueurs $x - 3$ et $x + 7$;
- un carré de côté x.



1. Quatre propositions sont écrites ci-dessous.
   Recopier sur la copie celle qui correspond à l'aire du carré. On ne demande pas de justifier.

$4x$	$4 + x$	x^2	$2x$

2. Montrer que l'aire du rectangle est égale à : $x^2 + 4x - 21$

3. On a écrit le script ci-dessous dans Scratch.
   On veut que ce programme renvoie l'aire du rectangle lorsque l'utilisateur a rentré une valeur de x (strictement supérieure à 3).
   Écrire sur la copie les contenus des trois cases vides des lignes 5, 6 et 7, en précisant les numéros de lignes qui correspondent à vos réponses.

```
quand la touche [espace ▽] est pressée
demander (Combien vaut x ?) et attendre
mettre [x ▽] à (réponse)
mettre [R ▽] à ((x) * (x))
ajouter (( ) * (x)) à (R)
ajouter ( ) à (R)
dire (regrouper (L'aire du rectangle est) et ( )) pendant (2) secondes
```

4. On a pressé la touche espace puis saisi le nombre 8. Que renvoie le programme ?

5. Quel nombre x doit-on choisir pour que l'aire du rectangle soit égale à l'aire du carré ?
   Toute trace de recherche, même non aboutie, sera prise en compte.

EXERCICE 5 — 20 points

Source : IREM de Clermont-Ferrand

Dans une habitation, la consommation d'eau peut être anormalement élevée lorsqu'il y a une fuite d'eau.

On considère la situation suivante :

- Une salle de bain est équipée d'une vasque de forme cylindrique, comme l'illustre l'image ci-dessous.
- Le robinet fuit à raison d'une goutte par seconde.
- En moyenne, 20 gouttes d'eau correspondent à un millilitre (1 ml).

Caractéristiques de la vasque :

Diamètre intérieur : 40 cm

Hauteur intérieure : 15 cm

Masse : 25kg

Rappels :

Volume du cylindre $= \pi \times$ rayon$^2 \times$ hauteur
1 dm$^3 = 1$ litre

1. En raison de la fuite, montrer qu'il tombe $86\ 400$ gouttes dans la vasque en une journée complète.

2. Calculer, en litres, le volume d'eau qui tombe dans la vasque en une semaine en raison de la fuite.

3. Montrer que le vasque a un volume de $18,85$ litres, arrondi au centilitre près.

4. L'évacuation de la vasque est fermée et le logement inoccupé pendant une semaine. L'eau va-t-elle déborder de la vasque ? Justifier la réponse.

5. À la fin du XIXe siècle, la consommation domestique d'eau par habitant en France était d'environ 17 litres par jour. Elle a fortement augmenté avec la généralisation de la distribution d'eau par le robinet dans les domiciles : elle est passée à 165 litres par jour et par habitant en 2004.

   En 2018, la consommation des Français baisse légèrement pour atteindre 148 litres d'eau par jour et par habitant.

   Calculer le pourcentage de diminution de la consommation quotidienne d'eau par habitant entre 2004 et 2018. On arrondira ce pourcentage à l'unité.

Correction

Exercice 1

20 points

1. Les droites (AC) et (BD) sont perpendiculaires à la même droite (AB).
   Or, si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième droite alors elles sont parallèles entre elles.
   Donc les droites (AC) et (BD) sont parallèles.

2. Les droites (AC) et (BD) sont parallèles, de plus les droites (CD) et (AE) sont sécantes en E donc d'après le théorème de Thalès :

   $\dfrac{AE}{EB} = \dfrac{CE}{ED} = \dfrac{AC}{BD}$ soit $\dfrac{20}{5} = \dfrac{CE}{ED} = \dfrac{AC}{1}$

   Donc : $AC = \dfrac{20 \times 1}{5} = 4$.

   Finalement, la largeur AC de la rivière est de 4 pas.

   Remarque : on pouvait aussi montrer que ACE est un agrandissement de BDE de coefficient 4.

3. Le triangle ACE est rectangle en A donc d'après le théorème de Pythagore :

   $CE^2 = AC^2 + AE^2$ ce qui équivaut avec des longueurs en pas à :
   $CE^2 = 4^2 + 20^2 = 416$

   Soit $CE = \sqrt{416}$ pas $= \sqrt{416} \times 65$ cm $\approx 1\ 330$ cm soit environ 13,3 m.

Autre méthode : *On pouvait aussi convertir toutes les longueurs en mètres avant d'utiliser le théorème de Pythagore*

$AC = 4$ pas $= 4 \times 65$ cm $= 260$ cm
$AE = 20$ pas $= 20 \times 65$ cm $= 1\ 300$ cm

Avec les longueurs en centimètres, on a donc : $CE^2 = 260^2 + 1\ 300^2 = 1\ 757\ 600$ donc $CE = \sqrt{1\ 757\ 600} \approx 1\ 330$.

La longueur CE est d'environ 1 330 cm soit 13,3 m.

4. (a) Le bâton parcourt environ 13,3 m en 5 secondes, sa vitesse est donc :

$$\frac{13,3 \text{ m}}{5 \text{ s}} = 2,66 \text{ m/s}.$$

(b)

Distance (en m)	2,66	d
Temps (en s)	1	3 600

C'est une situation de proportionnalité, donc : $d = \dfrac{2,66 \times 3\ 600}{1} = 9\ 576$.

Parcourir 2,66 mètres en une seconde est équivalent à 9 576 m en 3 600 s soit 9,576 kilomètres en une heure.

C'est donc vrai : la vitesse moyenne est légèrement inférieure à 10 km/h.

Exercice 2 — 20 points

Question 1 Réponse A

Remarque : l'homothétie ne conserve pas les longueurs et la symétrie axiale ne conserve pas l'orientation

Question 2 Réponse B (le point d'ordonnée 2 a 1 comme abscisse).

*Remarque : Si vous avez répondu 4 c'est que vous avez confondu l'antécédent **de** 2 et le nombre qui a 2 **pour** antécédent.*

Question 3 Réponse B

$$f(3) = 3 \times 3^2 - 7$$
$$f(3) = 3 \times 9 - 7$$
$$f(3) = 27 - 7$$
$$f(3) = 20$$

*Remarque : si vous avez répondu "29 est l'image de 2 par la fonction f", vous avez sans doute effectué la substitution $f(2) = 3 \times 2^2 - 7$ puis effectué la multiplication $3 \times 2 = 6$ **avant** de faire le carré...*
f n'est pas une fonction affine car sont expression développée et réduite comporte un terme en x^2 : c'est une fonction du second degré.

Question 4 Réponse B

La série ordonnée est :

$$3,41 \quad 3,7 \quad 4,01 \quad 4,28 \quad 4,3 \quad 4,62 \quad 4,91 \quad 5,15 \quad 5,25 \quad 5,42 \quad 5,82 \quad 6,07 \quad 6,11$$

Il y a 13 valeurs et $13 \div 2 = 6,5$ donc la médiane est la 7 valeur de cette série ordonnée, soit $4,91$.

7 n'est pas la médiane, c'est le rang de la médiane dans la série ordonnée. 5,15 est la 7^e valeur dans la série **non ordonnée**.

Remarque : en répondant 7 vous donnez le rang de la médiane et non sa valeur et en répondant $5,15$ vous avez oublié d'ordonner la valeur

Question 5 Réponse C

Le facteur d'agrandissement des longueurs est donné par $\dfrac{BU}{LA} = \dfrac{6,3}{2,1}$ donc il vaut 3.

Si les longueurs sont multipliées par 3 alors les aires sont multipliées par $3^2 = 9$.

Remarque : En répondant 3 vous oubliez que le facteur n'est pas le même pour les longueurs et pour les aires. En répondant 6 vous avez sans doute pensé que 3^2 valait la même chose que 3×2

Exercice 3 20 points

1. (a) Voici la décomposition en produit de facteurs premiers de 252 :

$$252 = 2 \times 126$$
$$252 = 2 \times 2 \times 63$$
$$252 = 2 \times 2 \times 3 \times 21$$
$$252 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 7$$
$$252 = 2^2 \times 3^2 \times 7$$

La proposition correcte est donc la 3.

Remarque : dans la proposition 1, 9 n'est pas un nombre premier ; dans la proposition 2, 21 n'est pas un nombre premier et dans la proposition 3, les 3 facteurs sont premiers et le produit est bien égal à 252.

(b) Voici la décomposition en produit de facteurs premiers de 156 :

$$156 = 2 \times 78$$
$$156 = 2 \times 2 \times 39$$
$$156 = 2 \times 2 \times 3 \times 13$$
$$156 = 2^2 \times 3 \times 13$$

2. (a) On a $252 = 36 \times 7$ et $156 = 36 \times 4 + 12$. Donc 36 n'est pas un diviseur commun à 252 et 156.
En conséquence, elle ne pourra pas faire 36 paquets.

(b) Cherchons N le plus grand commun diviseur de 252 et 156.
Dans les deux décompositions en produit de facteurs premiers de ces deux nombres, on choisit les facteurs qui sont communs aux deux produits. Il vient $N = 2^2 \times 3$ soit $N = 12$.
La collectionneuse pourra faire au maximum 12 paquets.

(c) Elle fait 12 paquets. On a :

$$252 = 12 \times 21 \qquad 156 = 12 \times 13$$

Il y aura donc 21 cartes *feu* et 13 cartes *terre*.

3. Soit E l'événement *La carte tirée est de type Terre* .
Il y a équiprobabilité donc la probabilité $p(E)$ de l'événement E correspond à la proportion de cartes

feu parmi toutes les cartes. Donc :

$$p(E) = \frac{156}{252 + 156}$$

$$p(E) = \frac{156}{408}$$

$$p(E) = \frac{13}{34}$$

$$p(E) \approx 0,4$$

Exercice 4 — 20 points

1. L'aire d'un carré de côté x est égale à x^2

2. Les dimensions du rectangle sont $x - 3$ et $x + 7$ donc son aire vaut $(x-3)(x+7)$. Développons cette expression.

   $(x-3)(x+7) = x^2 - 3x + 7x - 21$

   $(x-3)(x+7) = x^2 + 4x - 21$

   L'aire du rectangle est donc bien égale à $x^2 + 4x - 21$

3.
```
quand la touche espace est pressée
demander Combien vaut x ? et attendre
mettre x à réponse
mettre R à x * x
ajouter 4 * x à R
ajouter -21 à R
dire regrouper L'aire du rectangle est et R pendant 2 secondes
```

4. Lorsque $x = 8$, l'aire du rectangle vaut $(8-3)(8+7) = 5 \times 15 = 75$. Le programme renvoie donc 75.

   On peut aussi expliquer que :

   - à la ligne 3 x devient égal à 8 ;
   - à la ligne 4 R devient égal à $8 \times 8 = 64$;
   - à la ligne 5 on ajoute $4 \times 8 = 32$ à R et donc que R devient égal à 96 ;
   - à la ligne 6 on ajoute -21 à R qui devient $96 - 21 = 75$

- qui sera affiché à la ligne 7.

5. Pour que l'aire du rectangle soit égale à celle du carré, il est nécessaire que :

$$x^2 + 4x - 21 = x^2$$

On soustrait x^2aux deux membres.

$$4x - 21 = 0$$

On ajoute 21aux deux membres.

$$4x = 21$$

On divise les deux membres par 4.

$$x = 5,25$$

Pour que l'aire du rectangle soit égale à celle du carré, il faut donc choisir le nombre 5,25.

EXERCICE 5 ... points

1. Fuite: 1 goutte /s
   En une journée: $1 \times 60 \times 60 \times 24 = 86\ 400$ gouttes.

2. En une semaine: $86400 \times 7 = 604\ 800$ gouttes
   $604\ 800 \div 20 = 30\ 240$ mL $= 30,24$ L.

3. $V_{\text{vasque}} = \pi \times 20^2 \times 15 \approx 18\ 850\text{cm}^3$ soit $18,85\text{dm}^3$ ou $18,85$ L.

4. Le volume d'eau qui s'écoule est de 30,24 L, ce qui est supérieur au volume de la vasque (18,85 L).
   L'eau va donc déborder.

5. En 2004: 165 L par jour et par habitant.
   En 2018: 148 L par jour et par habitant.
   Pourcentage de diminution:
   $$\frac{165-148}{165} \approx 0,10 \text{ soit } 10\ \%$$