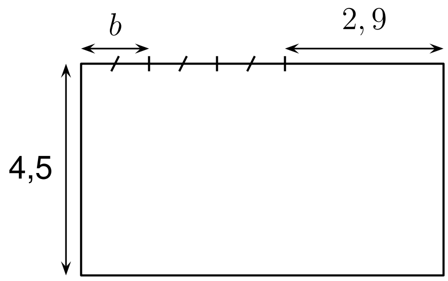
## EXERCICE 1 **22 points**

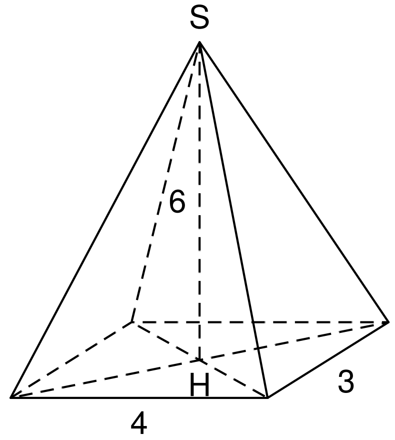
Cet exercice est constitué de six questions indépendantes.

1. Calculer $\frac{5}{6} + \frac{7}{8}$ et donner le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.
   On détaillera les calculs.
2. (a) Donner, sans justifier, la décomposition en facteurs premiers de $198$ et de $84$.
   (b) En déduire la forme irréductible de la fraction $\frac{198}{84}$.
3. On donne l'expression littérale suivante : $E = 5(3x - 4) - (2x - 7)$.
   Développer et réduire $E$.
4. On désigne par $b$ un nombre positif.

   Déterminer la valeur de $b$ telle que le périmètre du rectangle ci-contre soit égal à 25.

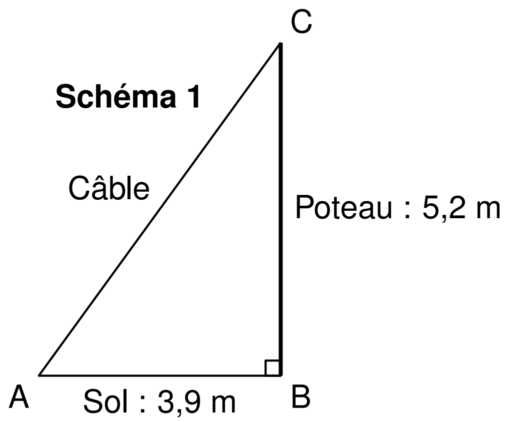
5. Calculer le volume de la pyramide à base rectangulaire de hauteur SH $= 6$ ci-contre.

6. Le nombre d'habitants d'une ville a augmenté de 12 % entre 2019 et 2020.
   Cette ville compte 20,692 habitants en 2020.
   Quel était le nombre d'habitants de cette ville en 2019 ?

## EXERCICE 2 **22 points**

Un poteau électrique vertical [BC] de $5,2$ m de haut est retenu par un câble métallique [AC] comme montré sur le schéma 1 qui n'est pas en vraie grandeur.



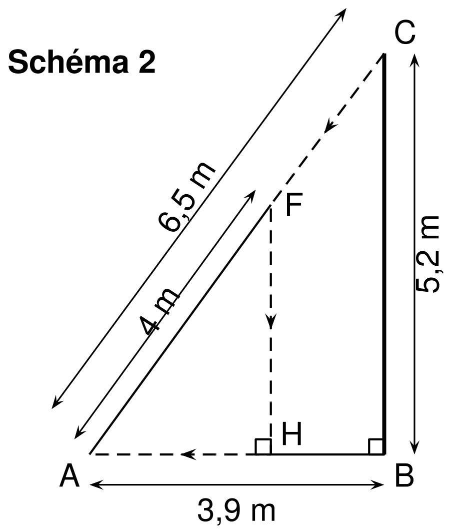

1. Montrer que la longueur du câble [AC] est égale à $6,5$ m.
2. Calculer la mesure de l'angle $\widehat{ACB}$ au degré près.

Deux araignées se trouvant au sommet du poteau (point C) décident de rejoindre le bas du câble (point A) par deux chemins différents.

3. La première araignée se déplace le long du câble [AC] à une vitesse de $0,2$ m/s.

   Vérifier qu'il lui faut 32,5 secondes pour atteindre le bas du câble.
4. La deuxième araignée décide de parcourir le chemin CFHA indiqué en pointillés sur le schéma 2 (qui n'est pas en vraie grandeur) : elle suit le morceau de câble [CF] en marchant, puis descend verticalement le long de [FH] grâce à son fil et enfin marche sur le sol le long de [HA].

   Calculer les longueurs FH et HA.




5. La deuxième araignée marche à une vitesse de 0,2 m/s le long des segments [CF] et [HA] et descend le long du segment [FH] à une vitesse de 0,8 m/s.

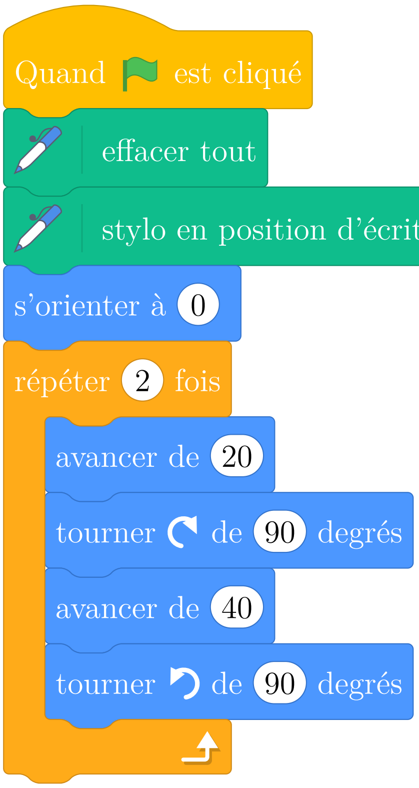
   Laquelle des deux araignées met le moins de temps à arriver en A ?

## Exercice 3

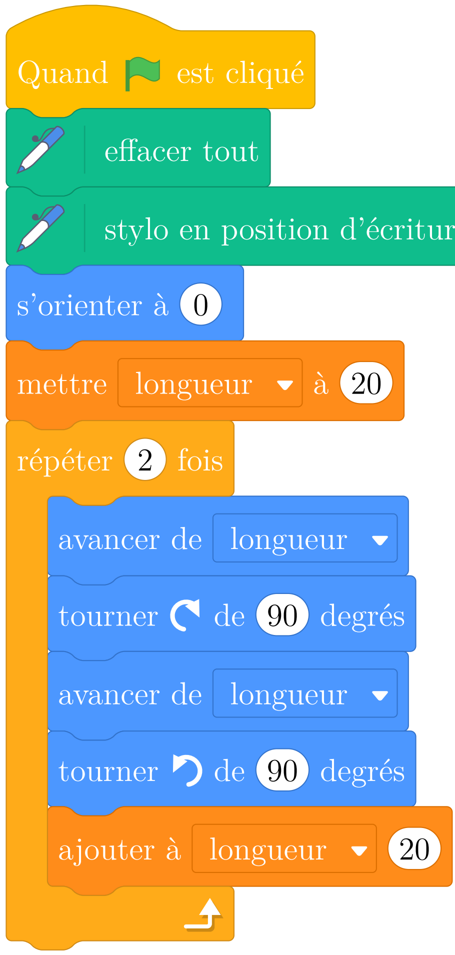
**17 points**

On utilise un logiciel de programmation.
On rappelle que s'orienter à $0$ signifie qu'on oriente le stylo vers le haut.
On considère les deux scripts suivants:

Script 1

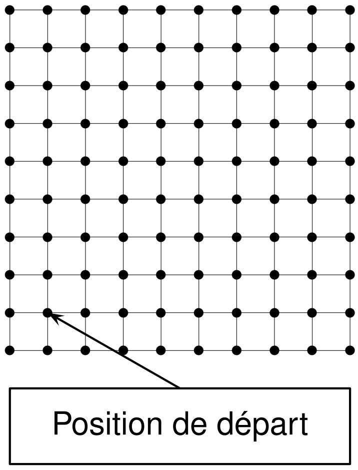



Script 2




1. On exécute le script 1 ci-dessus.

   Représenter le chemin parcouru par le stylo sur le document à rendre avec la copie.



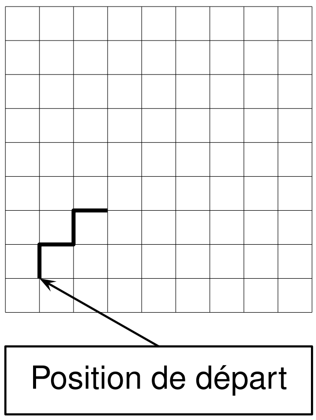

Chaque côté de carreau mesure 20 pixels.
La position de départ du stylo est indiquée sur la figure ci-contre.

2. Quel dessin parmi les trois ci-dessous correspond au script 2 ?

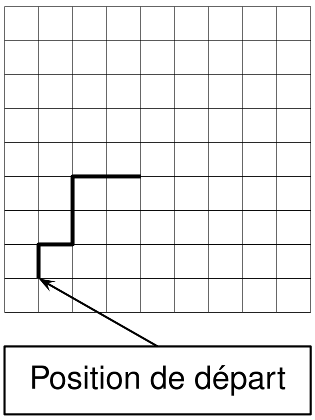
   On expliquera pourquoi les deux autres dessins ne correspondent pas au script 2.

   Chaque côté de carreau mesure 20 pixels.

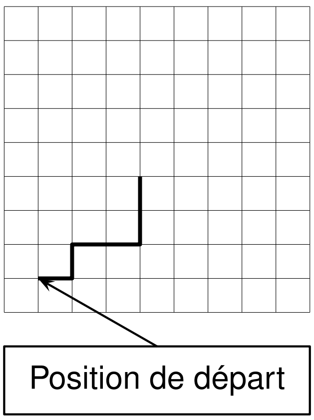
**Dessin 1**




**Dessin 2**



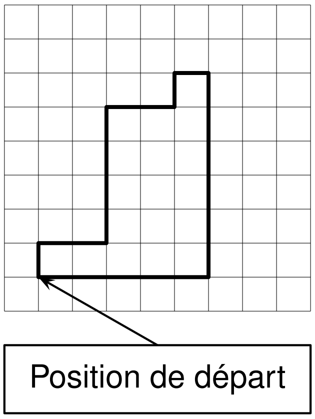

**Dessin 3**




3.

On souhaite maintenant obtenir le motif représenté sur le dessin 4 :

**Dessin 4**



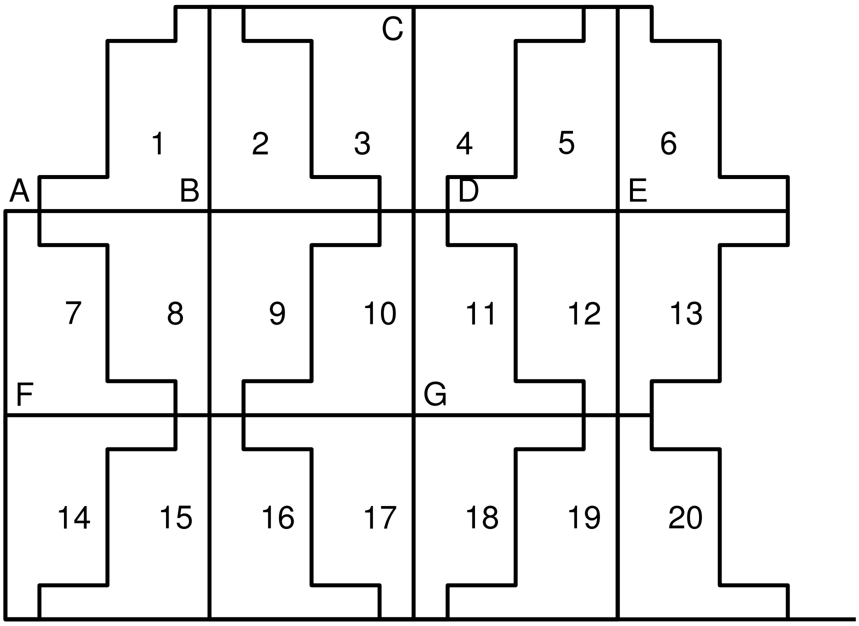

Compléter sans justifier les trois cases du script 3 donné en document à rendre avec la copie, permettant d'obtenir le dessin 4.

Script 3

```
Quand [drapeau] est cliqué
effacer tout
stylo en position d'écriture
s'orienter à (0)
avancer de (20)
tourner ↻ de (90) degrés
avancer de (......)
tourner ↺ de (90) degrés
avancer de (80)
tourner ↻ de (90) degrés
avancer de (40)
tourner ↺ de (90) degrés
avancer de (......)
tourner ↻ de (90) degrés
avancer de (20)
tourner ↻ de (90) degrés
avancer de (......)
tourner ↻ de (90) degrés
avancer de (100)
```

Trois cases à complé

4. À partir du motif représenté sur le dessin 4, on peut obtenir le pavage ci-dessous :




Répondre aux questions suivantes sur votre copie en indiquant le numéro du motif qui convient (on ne demande pas de justifier la réponse) :

(a) Quelle est l'image du motif 1 par la translation qui transforme le point B en E ?

(b) Quelle est l'image du motif 1 par la symétrie de centre B ?

(c) Quelle est l'image du motif 16 par la symétrie de centre G ?

(d) Quelle est l'image du motif 2 par la symétrie d'axe (CG) ?

## EXERCICE 4 **20 points**

1. Voici un tableau de valeurs d'une fonction $f$ :

| $x$ | $-2$ | $-1$ | 0 | 1 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 5 | 3 | 1 | $-1$ | $-5$ | $-7$ | $-9$ |

(a) Quelle est l'image de $3$ par la fonction $f$ ?

(b) Donner un nombre qui a pour image $5$ par la fonction $f$.

(c) Donner un antécédent de $1$ par la fonction $f$.

2. On considère le programme de calcul suivant:

| |
|---|
| Choisir un nombre<br>Ajouter 1<br>Calculer le carré du résultat |

(a) Quel résultat obtient-on en choisissant $1$ comme nombre de départ? Et en choisissant $-2$ comme nombre de départ?

(b) On note $x$ le nombre choisi au départ et on appelle $g$ la fonction qui à $x$ fait correspondre le résultat obtenu avec le programme de calcul.
Exprimer $g(x)$ en fonction de $x$.

3. La fonction $h$ est définie par $h(x) = 2x^2 - 3$.

   (a) Quelle est l'image de $3$ par la fonction $h$ ?

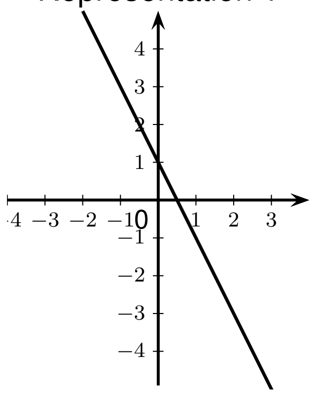
   (b) Quelle est l'image de $-4$ par la fonction $h$ ?

   (c) Donner un antécédent de $5$ par la fonction $h$. En existe-t-il un autre ?

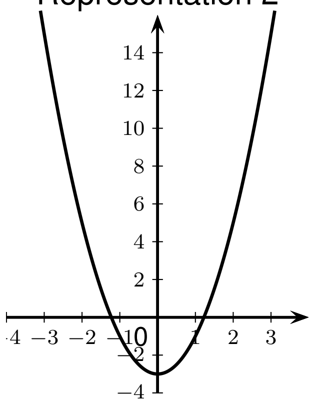
4. On donne les trois représentations graphiques suivantes qui correspondent chacune à une des fonctions $f$, $g$ et $h$ citées dans les questions précédentes.

   Associer à chaque courbe la fonction qui lui correspond, en expliquant la réponse.

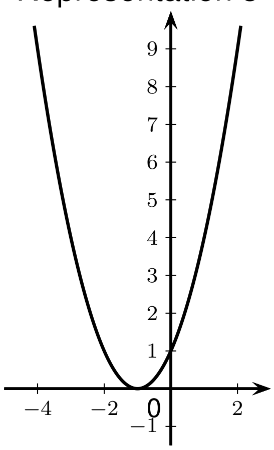
Représentation 1



Représentation 2



Représentation 3



## EXERCICE 5 — 19 points

Une urne contient 20 boules rouges, 10 boules vertes, 5 boules bleues et 1 boule noire.
Un jeu consiste à tirer une boule au hasard dans l'urne.
Lorsqu'un joueur tire une boule noire, il gagne 10 points.
Lorsqu'il tire une boule bleue, il gagne 5 points.
Lorsqu'il tire une boule verte, il gagne 2 points.
Lorsqu'il tire une boule rouge, il gagne 1 point.

1. Un joueur tire au hasard une boule dans l'urne.

   (a) Quelle est la probabilité qu'il gagne $10$ points?

   (b) Quelle est la probabilité qu'il gagne plus de $3$ points?

   (c) A-t-il plus de chance de gagner $2$ points ou de gagner $5$ points ?

2.

Le tableau ci-contre récapitule les scores obtenus par 15 joueurs:

(a) Quelle est la moyenne des scores obtenus par ces joueurs ?

(b) Quelle est la médiane des scores ?

(c) Déterminer la fréquence du score 10 points .

| **JOUEUR** | **SCORE** |
|---|---|
| JOUEUR A | 2 points |
| JOUEUR B | 1 point |
| JOUEUR C | 1 point |
| JOUEUR D | 5 points |
| JOUEUR E | 10 points |
| JOUEUR F | 2 points |
| JOUEUR G | 2 points |
| JOUEUR H | 5 points |
| JOUEUR I | 1 point |
| JOUEUR J | 2 points |
| JOUEUR K | 5 points |
| JOUEUR L | 10 points |
| JOUEUR M | 1 point |
| JOUEUR N | 1 point |
| JOUEUR O | 2 points |

3. Mille joueurs ont participé au jeu. Peut-on estimer le nombre de joueurs ayant obtenu le score de $10$ points ?

   La réponse, affirmative ou négative, devra être argumentée.

# Correction

## Exercice 1

**22 points**

1. $\dfrac{5}{6}+\dfrac{7}{8}=\dfrac{5\times 4}{6\times 4}+\dfrac{7\times 3}{8\times 3}=\dfrac{20+21}{24}=\dfrac{41}{24}$.

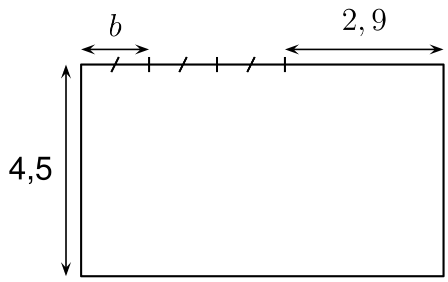
2. (a) • $198=9\times 22=3\times 3\times 2\times 11=2\times 3^2\times 11$ ;
   • $84=4\times 21=2\times 2\times 3\times 7=2^2\times 3\times 7$.

   (b) $\dfrac{198}{84}=\dfrac{2\times 3^2\times 11}{2^2\times 3\times 7}=\dfrac{3\times 11}{2\times 7}=\dfrac{33}{14}$.

3. $E=5(3x-4)-(2x-7)=15x-20-2x+7=13x-13$.

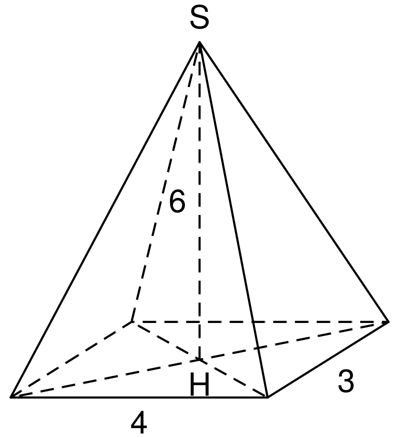
4. On désigne par $b$ un nombre positif.

   Le rectangle a une largeur de 4,5 et une longueur de 3b + 2,9.
   Son périmètre est égal à : $2(4,5+3b+2,9)=2(7,4+3b)=14,8+6b$.
   Il faut que $14,8+6b=25$, soit $6b=25-14,8$ ou $6b=10,2$, soit $b=\dfrac{10,2}{6}=\dfrac{3\times 3,4}{3\times 2}=1,7$.




5.

On sait que $V = \frac{1}{3} \times B \times h$, avec $B = 3 \times 4 = 12$ et $h = 6$, d'où :
$V = \frac{1}{3} \times 12 \times 6 = 24$.




6. Augmenter de 12 %, c'est multiplier par $1 + \frac{12}{100} = 1 + 0,12 = 1,12$.

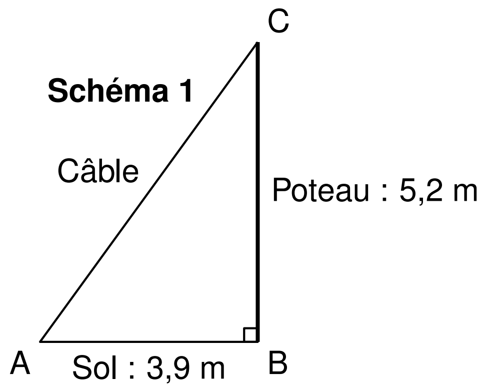
   Si $x$ est le nombre d'habitants en 2019, alors :

   $x \times 1,12 = 20{,}692$, d'où en multipliant chaque membre par $\frac{1}{1,12}$, $\quad x = \frac{20{,}692}{1,12} = 18{,}475$.

   Il y avait en 2019, 18,475 habitants.

## Exercice 2 — 22 points

Un poteau électrique vertical [BC] de $5,2$ m de haut est retenu par un câble métallique [AC] comme montré sur le schéma 1 qui n'est pas en vraie grandeur.




1. le théorème de Pythagore appliqué au triangle ABC rectangle en B, s'écrit :

   $AB^2 + BC^2 = AC^2$, soit $3,9^2 + 5,2^2 = AC^2$, ou encore $15,21 + 27,04 = AC^2$, soit $AC^2 = 42,25$.

   On a donc $AC = \sqrt{42,25} = 6,5$ (m).

2. On a par exemple $\cos \widehat{ACB} = \frac{BC}{AC} = \frac{5,2}{6,5} = \frac{52}{65} = \frac{4 \times 13}{5 \times 13} = \frac{4}{5} = \frac{8}{10} = 0,8$.

   La calculatrice donne $\widehat{ACB} \approx 36,9$.

   La mesure de l'angle $\widehat{ACB}$ est $37$ au degré près.

Deux araignées se trouvant au sommet du poteau (point C) décident de rejoindre le bas du câble (point A) par deux chemins différents.

3. On a $v = \dfrac{d}{t}$, avec $v = 0,2$ et $d = \text{CA} = 6,5$.

   Donc $0,2 = \dfrac{6,5}{t}$, d'où $0,2t = 6,5$ et $t = \dfrac{6,5}{0,2} = 6,5 \times 5 = 32,5$ (s).

4. La deuxième araignée décide de parcourir le chemin CFHA indiqué en pointillés sur le schéma 2 (qui n'est pas en vraie grandeur) : elle suit le morceau de câble [CF] en marchant, puis descend verticalement le long de [FH] grâce à son fil et enfin marche sur le sol le long de [HA].

   Les droites (FH) et (CB) étant toutes les deux perpendiculaires à la droite (AB) sont parallèles.

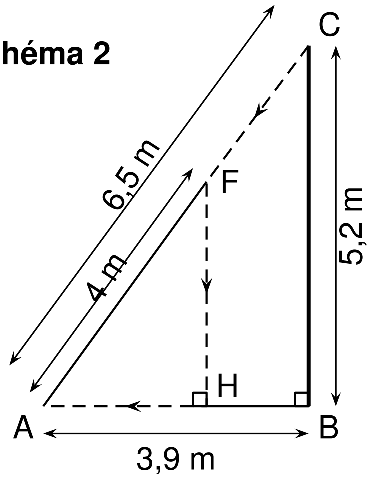
   - D'après le théorème de Thalès : $\dfrac{\text{FH}}{\text{BC}} = \dfrac{\text{AF}}{\text{AC}}$, soit $\dfrac{\text{FH}}{5,2} = \dfrac{4}{6,5}$, d'où en multipliant chaque membre

   par $5,2$ : FH $= \dfrac{4 \times 5,2}{6,5} = \dfrac{4 \times 52}{65} = \dfrac{4 \times 4 \times 13}{5 \times 13} = \dfrac{16}{5} = \dfrac{32}{10} = 3,2$ (m).

   - On a de même toujours d'après Thalès : $\dfrac{\text{AH}}{\text{AB}} = \dfrac{\text{AF}}{\text{AC}}$, soit $\dfrac{\text{AB}}{3,9} = \dfrac{4}{6,5}$, d'où en multipliant chaque

   membre par 3,9 : AF $= \dfrac{3,9 \times 4}{6,5} = \dfrac{39 \times 4}{65} = \dfrac{3 \times 13 \times 4}{5 \times 13} = \dfrac{12}{5} = \dfrac{24}{10} = 2,4$ (m).

**Schéma 2**




5. De $v = \dfrac{d}{t}$, on tire $d = v \times t$ et $t = \dfrac{d}{v}$.

   La deuxième araignée parcourt CF + HA $= (6,5 - 4) + 2,4 = 4,9$ (m) a la vitesse de 0,2 (m/s).

   Elle met donc $t_1 = \dfrac{4,9}{0,2} = 4,9 \times 5 = 24,5$ (s) pour parcourir ces deux segments.

   Pour parcourir le segment [FH], elle met $t_2 = \dfrac{3,2}{0,8} = \dfrac{32}{8} = 4$ (s).

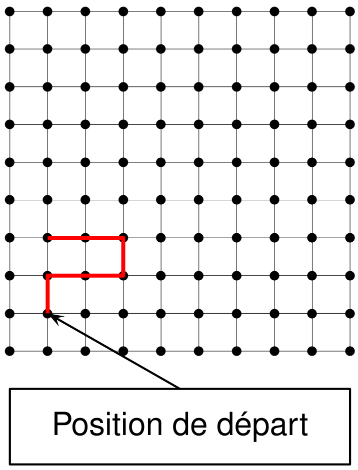
   Elle met donc au total : $24,5 + 4 = 28,5$ (s) : c'est elle qui met le moins de temps pour arriver en A.

## EXERCICE 3 **17 points**

1. On exécute le script 1 ci-dessus.

   Représenter le chemin parcouru par le stylo sur le document à rendre avec la copie.

   Le tracé est en rouge.

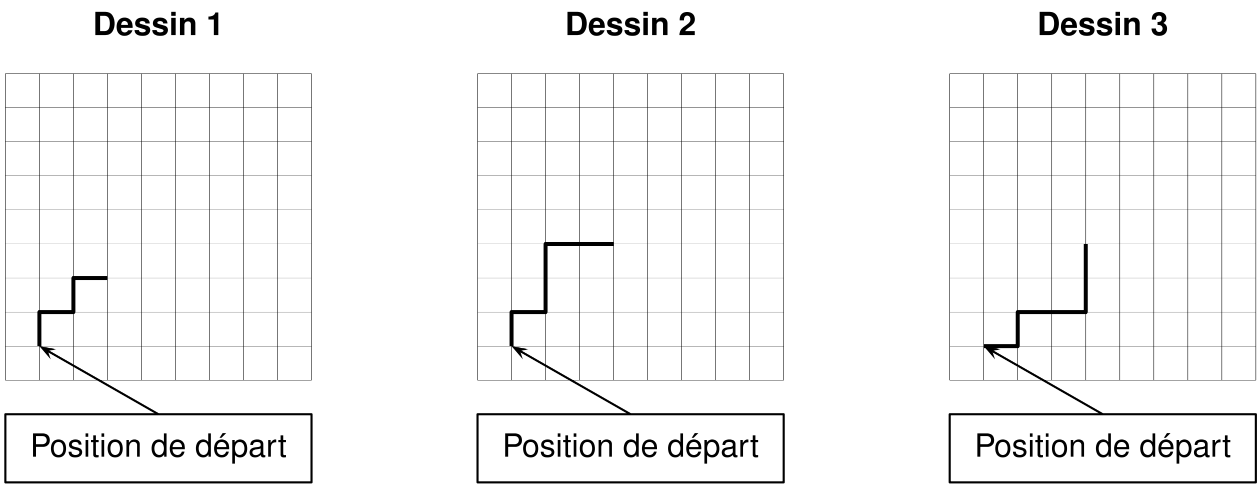



Chaque côté de carreau mesure 20 pixels.
La position de départ du stylo est indiquée sur la figure ci-contre.

2. Le dessin 1 n'est pas correct car après avoir avancé deux fois de 20 on doit avancer de 40.

   Le dessin 3 n'est pas correct car on ne sedirige pas au départ vers le haut.

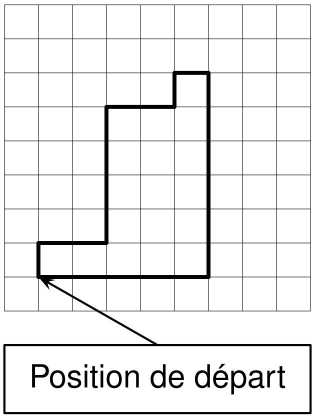
   Il reste donc le dessin 2 seul correct.




3.

On souhaite maintenant obtenir le motif représenté sur le dessin 4 :

**Dessin 4**

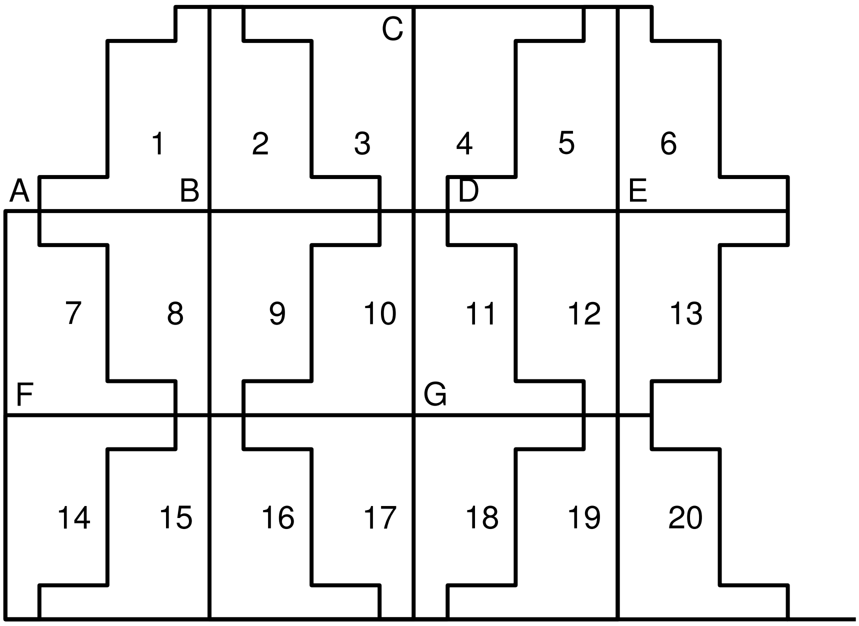



Compléter sans justifier les trois cases du script 3 donné à rendre avec la copie, permettant d'obtenir le dessin 4.
Les compléments sont en rouge.

```
Script 3
Quand [drapeau] est cliqué
effacer tout
stylo en position d'écriture
s'orienter à (0)
avancer de (20)
tourner ↻ de (90) degrés
avancer de (40)
tourner ↺ de (90) degrés
avancer de (80)
tourner ↻ de (90) degrés
avancer de (40)
tourner ↺ de (90) degrés
avancer de (20)
tourner ↻ de (90) degrés
avancer de (20)
tourner ↻ de (90) degrés
avancer de (120)
tourner ↻ de (90) degrés
avancer de (100)
```

Trois cases à complé

4. À partir du motif représenté sur le dessin 4, on peut obtenir le pavage ci-dessous :




Répondre aux questions suivantes sur votre copie en indiquant le numéro du motif qui convient (on ne demande pas de justifier la réponse) :

(a) Quelle est l'image du motif 1 par la translation qui transforme le point B en E ? Le motif 5.

(b) Quelle est l'image du motif 1 par la symétrie de centre B ? Le motif 9.

(c) Quelle est l'image du motif 16 par la symétrie de centre G ? Le motif 12.

(d) Quelle est l'image du motif 2 par la symétrie d'axe (CG) ? Le motif 5.

## EXERCICE 4 — 20 points

1. Voici un tableau de valeurs d'une fonction $f$ :

| $x$ | $-2$ | $-1$ | 0 | 1 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 5 | 3 | 1 | $-1$ | $-5$ | $-7$ | $-9$ |

(a) Quelle est l'image de $3$ par la fonction $f$ ?
L'image de $3$ par la fonction $f$ est $f(3) = -5$.

(b) Donner un nombre qui a pour image $5$ par la fonction $f$.
On a $f(-2) = 5$, donc $-2$ a pour image 5 par la fonction $f$.

(c) Donner un antécédent de $1$ par la fonction $f$.
On a $f(0) = 1$, donc 1 a pour antécédent $0$ par $f$.

2. On considère le programme de calcul suivant:

| |
|---|
| Choisir un nombre<br>Ajouter 1<br>Calculer le carré du résultat |

(a) Quel résultat obtient-on en choisissant $1$ comme nombre de départ?
On a $1 \rightarrow 1+1=2 \rightarrow 2^2=4$ : 1 donne 4 comme résultat.
Et en choisissant $-2$ comme nombre de départ ?
On a $-2 \rightarrow -2+1=-1 \rightarrow (-1)^2=1$ : $-2$ donne 1 comme résultat.

(b) On note $x$ le nombre choisi au départ et on appelle $g$ la fonction qui à $x$ fait correspondre le résultat obtenu avec le programme de calcul.
Exprimer $g(x)$ en fonction de $x$.
On a $x \rightarrow x+1 \rightarrow (x+1)^2$. Donc $g(x)=(x+1)^2$.

3. La fonction $h$ est définie par $h(x)=2x^2-3$.

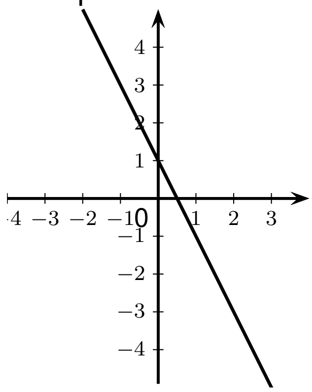
(a) Quelle est l'image de $3$ par la fonction $h$ ?
On a $h(3)=2\times 3^2-3=2\times 9-3=18-3=15$.

(b) Quelle est l'image de $-4$ par la fonction $h$ ?
On a $h(-4)=2\times(-4)^2-3=2\times 16-3=32-3=29$.

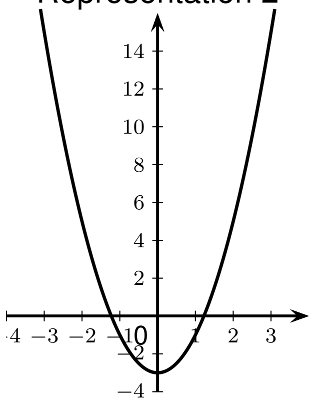
(c) Donner un antécédent de $5$ par la fonction $h$. En existe-t-il un autre ?
Il faut trouver $x$ tel que $2x^2-3=5$, soit $2x^2=8$ ou $x^2=4$ ou $x^2-4=0$, c'est-à-dire $(x-2)(x+2)=0$ et enfin $\left\{\begin{array}{lcl} x-2 & = & 0 \\ x+2 & = & 0 \end{array}\right.$ : il y a deux solutions : 2 et $-2$.

4. On donne les trois représentations graphiques suivantes qui correspondent chacune à une des fonctions $f$, $g$ et $h$ citées dans les questions précédentes.
Associer à chaque courbe la fonction qui lui correspond, en expliquant la réponse.

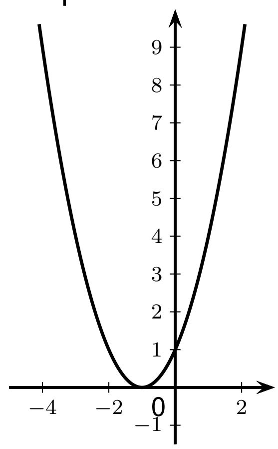
Représentation 1




Représentation 2




Représentation 3




La représentation 1 est celle de $f$ : c'est la seule pour laquelle l'image de 1 est $-1$.
La représentation 2 est celle de $h$ : on a bien $h(0)=-3$.
La représentation 3 est celle de $g$ : on a bien $g(0)=1$.

## EXERCICE 5 — 19 points

Une urne contient 20 boules rouges, 10 boules vertes, 5 boules bleues et 1 boule noire.
Un jeu consiste à tirer une boule au hasard dans l'urne.
Lorsqu'un joueur tire une boule noire, il gagne 10 points.
Lorsqu'il tire une boule bleue, il gagne 5 points.
Lorsqu'il tire une boule verte, il gagne 2 points.
Lorsqu'il tire une boule rouge, il gagne 1 point.

1. Un joueur tire au hasard une boule dans l'urne.
   (a) Il gagne 10 points s'il tire une boule noire ; il y a 1 boule noire sur un total de $20+10++5+1=36$ : la probabilité est égale à $\frac{1}{36}$.
   (b) Il gagnera plus de 3 points s'il tire une boule noire (1 seule) ou une boule bleue (5 boules bleues) : la probabilité est égale à $\frac{6}{36}=\frac{6\times1}{6\times6}=\frac{1}{6}$.
   (c) Il y a plus de boules vertes que de boules bleues : Il a plus de chance de gagner $2$ points que de gagner $5$ points.
2. 
   (a) La moyenne des scores est : $\frac{2+1+1+\ldots+2}{15}=\frac{50}{15}=\frac{5\times10}{5\times3}=\frac{10}{3}=3,333$ (points).
   (b) Les scores sont dans l'ordre croissant :
   1 1 1 1 1 2 2 2 2 2 ... : la médiane est entre la 7e et la 8e valeur soit 2.
   (c) La fréquence du score 10 est $\frac{2}{15}$.
3. Mille joueurs ont participé au jeu. Peut-on estimer le nombre de joueurs ayant obtenu le score de $10$ points ?

   La réponse, affirmative ou négative, devra être argumentée.

   On a vu à la question précédente que la fréquence du score 10 points est égale à $\frac{1}{36}$.

   Donc pour 1,000 joueurs il y aura à peu près :
   $1{,}000\times\frac{1}{36}=\frac{1{,}000}{36}=\frac{250}{9}\approx27,7$
   Environ 28 joueurs auront un score de 10 points.