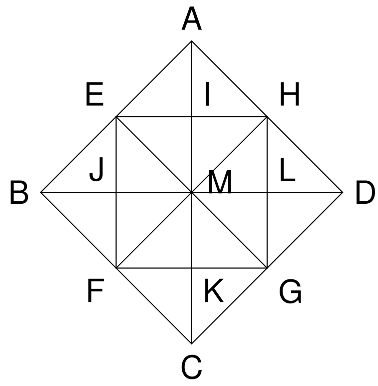
EXERCICE 1 24 points

Dans cet exercice, chaque question est indépendante. Aucune justification n'est demandée.

1. Décomposer 360 en produit de facteurs premiers.

2. À partir du triangle BEJ, rectangle isocèle en J, on a obtenu par pavage la figure ci-contre.



   (a) Quelle est l'image du triangle BEJ par la symétrie d'axe (BD) ?

   (b) Quelle est l'image du triangle AMH par la translation qui transforme le point E en B ?

   (c) Par quelle transformation passe-t-on du triangle AIH au triangle AMD ?

3. Calculer en détaillant les étapes :

$$\frac{7}{2}+\frac{15}{6}\times\frac{7}{25}$$

   On donnera le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.

4. Pour cette question, on indiquera sur la copie l'unique bonne réponse. Sachant que le diamètre de la Lune est d'environ 3,474 km, la valeur qui approche le mieux son volume est :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$12,3\times10^{17}\ \mathrm{km}^3$	$1{,}456{,}610\ \mathrm{km}^3$	$1,8\times10^{11}\ \mathrm{km}^3$	$2,2\times10^{10}\ \mathrm{km}^3$

5. On considère un triangle RST rectangle en S. Compléter le tableau ci-dessous à rendre avec la copie. On arrondira la valeur des angles à l'unité.

Longueurs	**Angles**	**Périmètre du triangle RST**	**Aire du triangle RST**
RS = 10 mm	$\widehat{\mathrm{RST}} = 90$ř	3*$\mathcal{P} =$	3*$\mathcal{A} =$
ST = 24 mm	$\widehat{\mathrm{STR}} \approx$		
RT = 26 mm	$\widehat{\mathrm{SRT}} \approx$		

EXERCICE 2 21 points

Partie 1

Dans cette première partie, on lance un dé bien équilibré à six faces numérotées de 1 à 6, puis on note le numéro de la face du dessus.

1. Donner sans justification les issues possibles.

2. Quelle est la probabilité de l'évènement A : On obtient 2 ?
3. Quelle est la probabilité de l'évènement B : On obtient un nombre impair ?

Partie 2

Dans cette deuxième partie, on lance simultanément deux dés bien équilibrés à six faces, un rouge et un vert. On appelle score la somme des numéros obtenus sur chaque dé.

1. Quelle est la probabilité de l'évènement C : le score est 13 ? Comment appelle-t-on un tel évènement ?
2. Dans le tableau à double entrée ci-dessous, on remplit chaque case avec la somme des numéros obtenus sur chaque dé.
   (a) Compléter, sans justifier, le tableau ci-dessous.
   (b) Donner la liste des scores possibles.
3. (a) Déterminer la probabilité de l'évènement D : le score est 10 .
   (b) Déterminer la probabilité de l'évènement E : le score est un multiple de 4 .
   (c) Démontrer que le score obtenu a autant de chance d'être un nombre premier qu'un nombre strictement plus grand que 7.

Dé vert / Dé rouge	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3				7		
4		6				
5						
6						

EXERCICE 3 16 points

Un professeur propose à ses élèves trois programmes de calculs, dont deux sont réalisés avec un logiciel de programmation.

Programme A

```
quand 🏁 est cliqué
demander (choisir un nombre) et attendre
mettre [nombre choisi ▾] à (réponse)
mettre [Valeur 1 ▾] à ((1) + (nombre choisi))
mettre [Valeur 2 ▾] à ((3) * (Valeur 1))
mettre [résultat ▾] à ((Valeur 2) - (3))
dire (regrouper (On obtient) et (résultat)) pendant (2) secondes
```

Programme B

```
quand 🏁 est cliqué
demander (choisir un nombre) et attendre
mettre [nombre choisi ▾] à (réponse)
mettre [Valeur 1 ▾] à ((nombre choisi) + (3))
mettre [Valeur 2 ▾] à ((nombre choisi) - (5))
mettre [résultat ▾] à ((Valeur 1) * (Valeur 2))
dire (regrouper (On obtient) et (résultat)) pendant (2) secondes
```

Programme C

- Choisir un nombre
- Multiplier par 7
- Ajouter 3
- Soustraire le nombre de départ

1. (a) Montrer que si on choisit 1 comme nombre de départ alors le programme A affiche pendant 2 secondes On obtient 3 .

   (b) Montrer que si on choisit 2 comme nombre de départ alors le programme B affiche pendant 2 secondes On obtient -15 .

2. Soit x le nombre de départ, quelle expression littérale obtient-on à la fin de l'exécution du programme C ?

3. Un élève affirme qu'avec un des trois programmes on obtient toujours le triple du nombre choisi. A-t-il raison ?

4. (a) Résoudre l'équation $(x+3)(x-5)=0$.

   (b) Pour quelles valeurs de départ le programme B affiche-t-il On obtient 0 ?

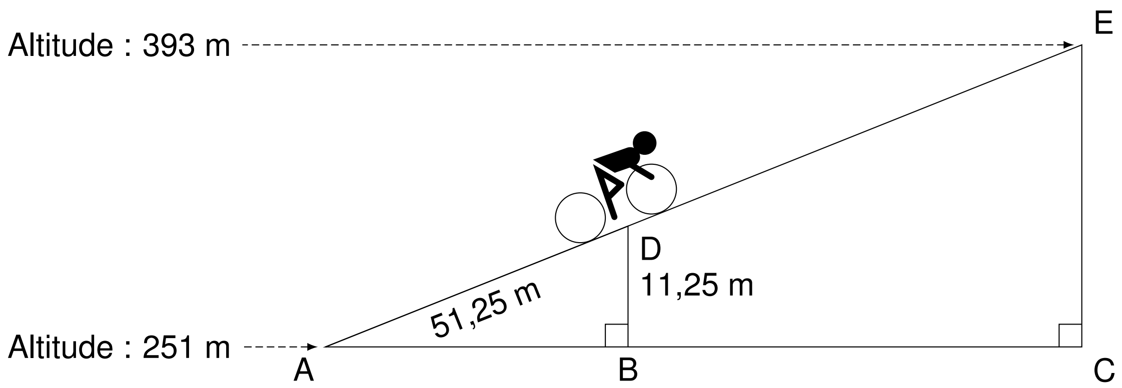
5. Pour quelle(s) valeur(s) de départ le programme C affiche-t-il le même résultat que le programme A ?

EXERCICE 4 — 19 points

Aurélie fait du vélo en Angleterre au col de Hardknott.

Elle est partie d'une altitude de 251 mètres et arrivera au sommet à une altitude de 393 mètres.

Sur le schéma ci-dessous, qui n'est pas en vraie grandeur, le point de départ est représenté par le point A et le sommet par le point E. Aurélie est actuellement au point D.



Les droites (AB) et (DB) sont perpendiculaires. Les droites (AC) et (CE) sont perpendiculaires. Les points A, D et E sont alignés. Les points A, B et C sont alignés.

AD = 51,25 m et DB = 11,25 m.

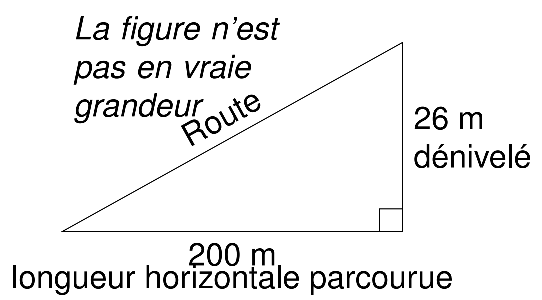
1. Justifier que le dénivelé qu'Aurélie aura effectué, c'est-à-dire la hauteur EC, est égal à 142 m.
2. (a) Prouver que les droites (DB) et (EC) sont parallèles.
   (b) Montrer que la distance qu'Aurélie doit encore parcourir, c'est-à-dire la longueur DE, est d'environ 596 m.
3. On utilisera pour la longueur DE la valeur 596 m.

   Sachant qu'Aurélie roule à une vitesse moyenne de 8 km/h, si elle part à 9 h 55 du point D, à quelle heure arrivera-t-elle au point E ? Arrondir à la minute.
4. La pente d'une route est obtenue par le calcul suivant :

   $$\text{pente} = \frac{\text{dénivelé}}{\text{longueur horizontale parcourue}}.$$

   La pente s'exprime en pourcentage.
   Démontrer que la pente de la route parcourue par Aurélie est de 22,5 %.

Exemple d'une pente à 13 %



Exercice 5 20 points

Une station de ski propose à ses clients trois formules pour la saison d'hiver :

- Formule A : on paie 36,50 € par journée de ski.
- Formule B : on paie 90 € pour un abonnement SkiPlus pour la saison, puis 18,50 € par journée de ski.

- Formule C : on paie 448,50 € pour un abonnement SkiTotal qui permet ensuite un accès gratuit à la station pendant toute la saison.

1. Marin se demande quelle formule choisir cet hiver. Il réalise un tableau pour calculer le montant à payer pour chacune des formules en fonction du nombre de journées de ski. Compléter, sans justifier, le tableau ci-dessous.

Nombre de journées de ski	2	6	10
Formule A	73 €		
Formule B	127 €		
Formule C	448,50 €		

2. Dans cette question, x désigne le nombre de journées de ski.

   On considère les trois fonctions f, g et h définies par :

   $$f(x) = 90 + 18,5x \qquad g(x) = 448,5 \qquad h(x) = 36,5x$$

   (a) Laquelle de ces trois fonctions représente une situation de proportionnalité ?

   (b) Associer, sans justifier, chacune de ces fonctions à la formule A, B ou C correspondante.

   (c) Calculer le nombre de journées de ski pour lequel le montant à payer avec les formules A et B est identique.

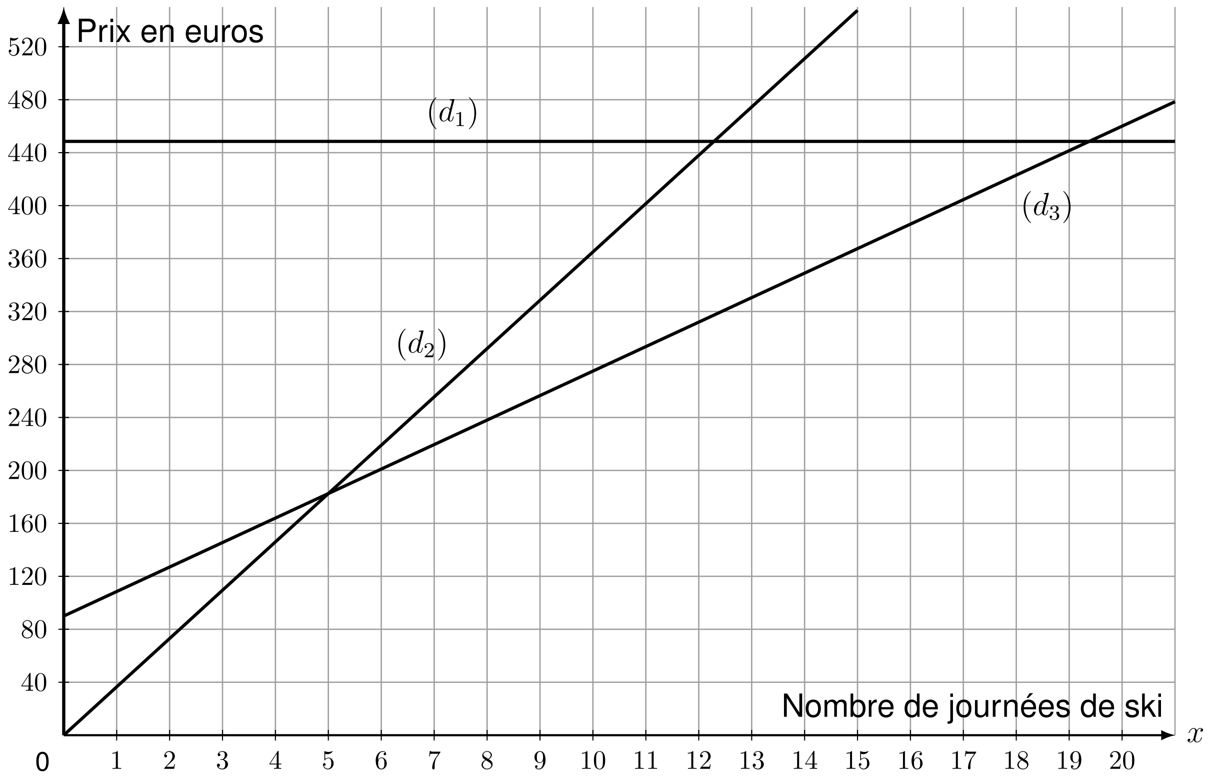
3. On a représenté graphiquement les trois fonctions dans le graphique ci dessous.

   Sans justifier et à l'aide du graphique :

   (a) Associer chaque représentation graphique (d_1), (d_2) et (d_3) à la fonction f, g ou h correspondante.

   (b) Déterminer le nombre maximum de journées pendant lesquelles Marin peut skier avec un budget de 320 €, en choisissant la formule la plus avantageuse.

   (c) Déterminer à partir de combien de journées de ski il devient avantageux de choisir la formule C.


Prix en euros
520
480
440
400
360
320
280
240
200
160
120
80
40
0
(d_1)
(d_2)
(d_3)
Nombre de journées de ski
x
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20

Correction

Exercice 1

24 points

1.

$$\begin{array}{r|l} 360 & 9 \\ 40 & 8 \\ 5 & 5 \end{array}$$

Donc $360 = 9 \times 8 \times 5 = 2^3 \times 3^2 \times 5$.

2. (a) Le point B a pour image B et le point J appartient (BD), il est aussi égal à son image.
   Enfin l'image de E est le point F.
   Donc l'image du triangle BEJ par la symétrie d'axe (BD) est le triangle BJF.

   (b) La translation qui transforme le point E en B transforme A en E, M en F et H en M.
   Donc le triangle AMH a pour image EFM.

   (c) Le triangle AMD contient 4 triangles identiques au triangle initial BEJ ; l'aire étant le quadruple de celle du triangle initial ses dimensions sont le double de celle de AIH.
   Le point A étant commun aux deux triangles le triangle AMD est l'image du triangle AIH par l'homothétie de centre A et de rapport 2.

3. $\dfrac{7}{2} + \dfrac{15}{6} \times \dfrac{7}{25} = \dfrac{7}{2} + \dfrac{15 \times 7}{6 \times 25} = \dfrac{7}{2} + \dfrac{5 \times 3 \times 7}{2 \times 3 \times 5 \times 5} = \dfrac{7}{2} + \dfrac{7}{10} = \dfrac{35}{10} + \dfrac{7}{10} = \dfrac{42}{10} = \dfrac{2 \times 21}{2 \times 5} = \dfrac{21}{5}$

4. Une boule de rayon R a un volume de $V = \dfrac{4}{3} \times \pi R^3$.

   Donc le volume de la Lune est environ :

   $V_{\text{Lune}} \approx \dfrac{4}{3} \times \pi \times 1{,}737^3 \approx 2.195 \times 10^{10}$; donc réponse D : $2,2 \times 10^{10}$.

5. Pour les angles, on peut utiliser le cosinus, le sinus ou la tangente.

   Avec le cosinus : $\cos\widehat{\text{STR}} = \dfrac{\text{ST}}{\text{RT}} = \dfrac{24}{26} = \dfrac{12}{13}$.

   La calculatrice donne $\widehat{\text{STR}} \approx 22,6$, soit 23 au degré près.

   L'angle complémentaire $\widehat{\text{SRT}}$ mesure donc 67 au degré près.

   Voir le tableau à la fin.

Longueurs	**Angles**	**Périmètre du triangle RST en mm**	**Aire du triangle RST**
RS = 10 mm	$\widehat{\text{RST}} = 90$	3*$\mathcal{P} = 10 + 24 + 36 = 60$	3*$\mathcal{A} = \dfrac{10 \times 24}{2} =$ 120 mm^2
ST = 24 mm	$\widehat{\text{STR}}$ ≈23		
RT = 26 mm	$\widehat{\text{SRT}}$ ≈67		

EXERCICE 2 21 points

Partie 1

Dans cette première partie, on lance un dé bien équilibré à six faces numérotées de 1 à 6, puis on note le numéro de la face du dessus.

1. Les issues sont 1, 2, 3, 4, 5, 6.
2. La probabilité d'obtenir le 6 (comme les autres nombres) est $\dfrac{1}{6}$.
3. Il y a 3 nombres impairs (ou pairs). la probabilité est donc égale à $\dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$.

Partie 2

Dans cette deuxième partie, on lance simultanément deux dés bien équilibrés à six faces, un rouge et un vert. On appelle score la somme des nombres correspondants aux issues de chaque dé.

1. La plus grande somme possible étant 12, l'évènement est impossible de probabilité nulle.
2. (a) Voir à la fin
   (b) Les scores possibles sont : 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, soit 11 scores différents possibles
3. (a) Il y a $6 \times 6 = 36$ issues possibles.
   On a $10 = 4 + 6 = 5 + 5 = 6 + 4$: 3 issues, donc $p(D) = \dfrac{3}{36} = \dfrac{1}{12}$.
   (b) On a $p(E) = \dfrac{9}{36} = \dfrac{1}{4}$.
   (c) Il y a 15 scores premiers et 15 scores supérieurs à 15.

Dé vert / Dé rouge	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

EXERCICE 3 — 16 points

1. (a) On obtient successivement : $1 \to 1+1=2 \to 3\times 2=6 \to 6-3=3$.
   (b) On obtient successivement : $2 \to 2+3=5 \to 2-5=-3 \to 5\times -3=-15$.

2. Soit x le nombre de départ, quelle expression littérale obtient-on à la fin de l'exécution du programme C ? On obtient successivement : $x \to x\times 7 \to 7x+3 \to 7x+3-x=6x+3$.

3. On vient de voir que le programme C donne $6x+3 \neq 3x$;

   Le programme A donne à partir de x : $x \to 1+x \to 3(1+x)=3+3x \to 3+3x-3=3x$: on obtient bien le triple.

   Le programme B donne à partir de x : $x \to x+3 \to x-5 \to (x+3)(x-5)=x^2-5x+3x-15=x^2-2x-15 \neq 3x$.

   L'élève a raison.

4. (a) U produit de deux facteurs est nul si l'un des facteurs est nul, donc :
   $(x+3)(x-5)=0$ si $\left\{\begin{array}{rcl} x+3 & = & 0\\ x-5 & = & 0\end{array}\right.$ ou encore $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & -3\\ x & = & 5\end{array}\right.$
   L'ensemble des solutions est $S=\{-3\ ;\ 5\}$.
   (b) On a vu que le programme B donne à partir de x le produit $(x+3)(x-5)$ ry on a vu dans la question précédente que -3 et 5 annulaient ce produit.
   Donc le programme B donne à partir de -3 et à partir de 5 le nombre 0.

5. Il faut trouver x tel que $6x+3=3x$ soit en ajoutant à chaque membre $-3x$: $3x+3=0$ ou $3x=-3$, soit $3\times x=3\times(-1)$ et finalement $x=-1$

   Le nombre -1 donne par A ou C le même résultat -3.

EXERCICE 4 — 19 points

1. On a CE $=393-251=142$ (m).

2. (a) Les droites (DB) et (EC) étant toutes les deux perpendiculaires à la droite (AC) sont parallèles.

(b) A, D, E sont alignés dans cet ordre,
A, B et C sont alignés dans cet ordre,
et les droites (DB) et (EC) sont parallèles : on est donc une situation où l'on peut appliquer le théorème de Thalès, soit :
$\dfrac{\text{BD}}{\text{EC}} = \dfrac{\text{AD}}{\text{AE}}$,
soit $\dfrac{11,25}{142} = \dfrac{51,25}{\text{AE}}$;
on en déduit $11,25\text{AE} = 142 \times 51,25$ puis $\text{AE} = \dfrac{142 \times 51,25}{11,25} \approx 646,8$.
Donc $\text{DE} = \text{AE} - \text{AD} \approx 646,8 - 51,25 \approx 595,6$ soit 596 (m) au mètre près.

3. Aurélie parcourt donc 8,000 m en 60 minutes ou 800 m en 6 min ou 400 m en 3 minutes.

Elle mettra donc pour parcourir 596 (m) un temps t tel que $\dfrac{3}{400} = \dfrac{t}{596}$, soit en multipliant chaque membre par 596 :

$t = \dfrac{3 \times 596}{400} = 4,47$ (min), donc $t \approx 4$ (m) : elle arrivera donc à 9 h 59 min à la minute près.

4. On a par définition dans le triangle rectangle ABD : $\sin \widehat{\text{CAE}} = \dfrac{\text{BD}}{\text{AD}} = \dfrac{11,25}{51,25}$. La calculatrice donne $\widehat{\text{CAE}} \approx 12,68$.

Dabs le triangle ABC on a $\tan \widehat{\text{CAE}} = \dfrac{\text{CE}}{\text{AC}}$ d'où $\text{AC} = \dfrac{\text{CE}}{\tan \widehat{\text{CAE}}} \approx \dfrac{142}{0,225} \approx 631,1$ (m).

Finalement la pente est $\approx \dfrac{142}{631,1} \approx 0,225$, donc $\dfrac{22,5}{100} = 22,5\,\%$.

Exercice 5 — 20 points

1. Voici le tableau complété.

Nombre de journées de ski	2	6	10
Formule A	73 €	219 €	365 €
Formule B	127 €	201 €	275 €
Formule C	448,50 €	448,50 €	448,50 €

$f(x) = 90 + 18,5x$ $\qquad g(x) = 448,5$ $\qquad h(x) = 36,5x$

2. (a) Seule la fonction h représente une situation de proportionnalité.

(b) Formule A : fonction h ;
Formule B : fonction f ;
Formule C : fonction g.

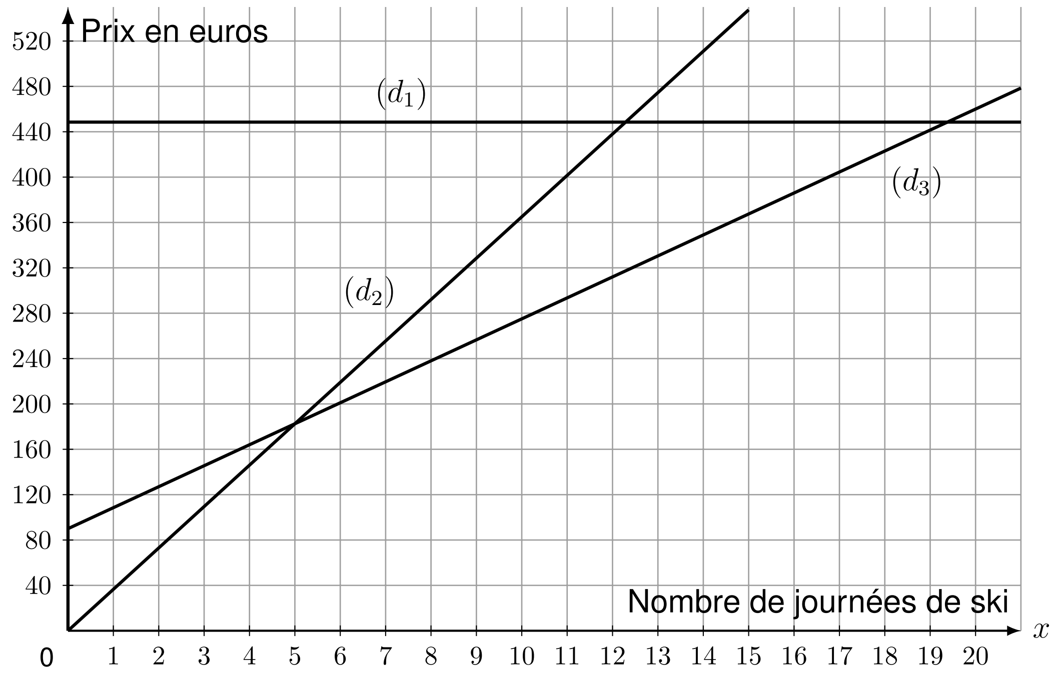
(c) Il faut donc résoudre l'équation : $h(x) = f(x)$, soit $36,5x = 90 + 18,5x$ d'où en ajoutant $-18,5x$ à chaque membre : $18x = 90$ ou $2 \times 9x = 9 \times 2 \times 5$ et en simplifiant par 2×9 ; $x = 5$.
On a effectivement : $h(5) = 182,5$ et $f(5) = 90 + 18,5 \times 5 = 90 + 92,5 = 182,5$.
On paiera avec les formules A et B, 182,50 €.

3. On a représenté graphiquement les trois fonctions dans le graphique ci dessous.
Sans justifier et à l'aide du graphique :

(a) – (d_1) correspond à la fonction constante g définie par $g(x) = 448,5$;
– (d_2) correspond à la fonction linéaire h définie par $h(x) = 36,5x$;
– (d_3) correspond à la fonction f définie par $f(x) = 90 + 18,5x$.

(b) Marin ne peut bien sûr pas se payer le forfait à 448,50 €.
Avec la formule A l'équation $73x = 320$ a pour solution $x = \dfrac{320}{73} \approx 4,4$: il peut donc skier 4 jours.
Avec la formule B l'équation $90 + 18,5x = 320$ peut s'écrire $18,5x = 230$ qui a pour solution $x = \dfrac{230}{18,5} \approx 12,4$, soit 12 journées de ski, soit le nombre maximal de journées de ski qu'il peut se payer (il paiera en fait $90 + 18,5 \times 12 = 312$ €).

(c) La formule A est la plus onéreuse. Il faut donc comparer les formules B et C. Or :
$448,5 < 90 + 18,5x$ peut s'écrire $358,5 < 18,5x$ ou encore $\dfrac{358,5}{18,5} < x$.
Or $\dfrac{358,5}{18,5} \approx 19,4$, donc le plus petit entier naturel qui vérifie l'inéquation est 20.
Le forfait est intéressant à partir de 20 journées de ski dans l'année.
Remarque : on pouvait aussi résoudre les deux dernières questions graphiquement.


Prix en euros
520
480
440
400
360
320
280
240
200
160
120
80
40
0
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20
Nombre de journées de ski
x
(d1)
(d2)
(d3)