Exercice 1 — 5 points

On considère l'expression $E = (x-2)(2x+3) - 3(x-2)$.

1. Développer E.
2. Factoriser E et vérifier que $E = 2F$, où $F = x(x-2)$.
3. Déterminer tous les nombres x tels que $(x-2)(2x+3) - 3(x-2) = 0$.

Exercice 2 — 6 points

Un sac contient 20 boules ayant chacune la même probabilité d'être tirée. Ces 20 boules sont numérotées de 1 à 20. On tire une boule au hasard dans le sac.

Tous les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

1. Quelle est la probabilité de tirer la boule numérotée 13 ?
2. Quelle est la probabilité de tirer une boule portant un numéro pair?
3. A-t-on plus de chances d'obtenir une boule portant un numéro multiple de 4 que d'obtenir une boule portant un numéro diviseur de 4 ?
4. Quelle est la probabilité de tirer une boule portant un numéro qui soit un nombre premier ?

Exercice 3 — 7 points

On considère le programme de calcul ci-contre dans lequel x, Étape 1, Étape 2 et Résultat sont quatre variables.

1. (a) Julie a fait fonctionner ce programme en choisissant le nombre 5. Vérifier que ce qui est dit à la fin est: J'obtiens finalement 20 .
   (b) Que dit le programme si Julie le fait fonctionner en choisissant au départ le nombre 7 ?
2. Julie fait fonctionner le programme, et ce qui est dit à la fin est: J'obtiens finalement 8 . Quel nombre Julie a-t-elle choisi au départ ?
3. Si l'on appelle x le nombre choisi au départ, écrire en fonction de x l' expression obtenue à la fin du programme, puis réduire cette expression autant que possible.
4. Maxime utilise le programme de calcul ci-dessous :

•	Choisir un nombre.
•	Lui ajouter 2
•	Multiplier le résultat par 5

   Peut-on choisir un nombre pour lequel le résultat obtenu par Maxime est le même que celui obtenu par Julie ?

EXERCICE 4 **7 POINTS**

Pour ses 32 ans, Denis a acheté un vélo d'appartement afin de pouvoir s'entraîner pendant l'hiver.
La fréquence cardiaque (FC) est le nombre de pulsations (ou battements) du cur par minute.

1. Denis veut estimer sa fréquence cardiaque : en quinze secondes, il a compté 18 pulsations.

   À quelle fréquence cardiaque, exprimée en pulsations par minute, cela correspond-il?
2. Son vélo est équipé d'un cardiofréquencemètre qui lui permet d'optimiser son effort en enregistrant, dans ce cardiofréquencemètre, toutes les pulsations de son coeur. À un moment donné, le cardiofréquencemètre a mesuré un intervalle de $0,8$ seconde entre deux pulsations.

   Calculer la fréquence cardiaque qui sera affichée par le cardiofréquencemètre.
3. Après une séance d'entraînement, le cardiofréquencemètre lui a fourni les renseignements suivants :

Nombre de pulsations enregistrées	**Fréquence minimale enregistrée**	**Fréquence moyenne**	**Fréquence maximale enregistrée**
3,640	65 pulsations/minute	130 pulsations/minute	182 pulsations/minute

   (a) Quelle est l'étendue des fréquences cardiaques enregistrées ?
   (b) Denis n'a pas chronométré la durée de son entraînement. Quelle a été cette durée ?
4. Denis souhaite connaître sa fréquence cardiaque maximale conseillée (FCMC) afin de ne pas la dépasser et ainsi de ménager son cur. La FCMC d'un individu dépend de son âge a, exprimé en années, elle peut s'obtenir grâce à la formule suivante établie par Astrand et Ryhming :

Fréquence cardiaque maximale conseillée = $220-$âge.

On note $f(a)$ la FCMC en fonction de l'âge a, on a donc $f(a) = 220 - a$.

(a) Vérifier que la FCMC de Denis est égale à 188 pulsations/minute.
(b) Comparer la FCMC de Denis avec la FCMC d'une personne de 15 ans.

5. Après quelques recherches, Denis trouve une autre formule permettant d'obtenir sa FCMC de façon plus précise. Si a désigne l'âge d'un individu, sa FCMC peut être calculée à l'aide de la formule de Gellish :

Fréquence cardiaque maximale conseillée = $191,5 - 0,007 \times$ âge^2

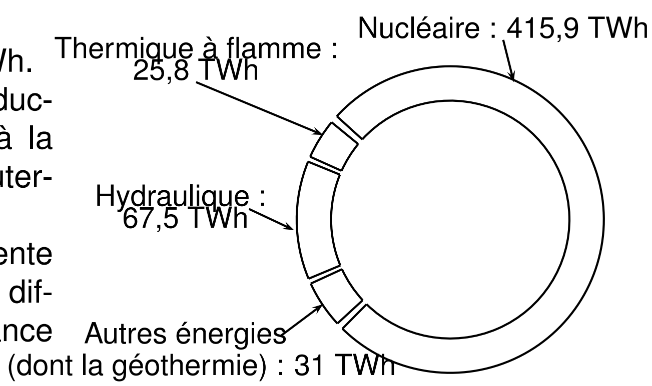
On note $g(a)$ la FCMC en fonction de l'âge a, on a donc
$g(a) = 191,5 - 0,007 \times a^2$.
Denis utilise un tableur pour comparer les résultats obtenus à l'aide des deux formules :

B2		=220-A2	
	A	B	C
1	Âge a	FCMC $f(a)$ (Astrand et Ryhming)	FCMC $g(a)$ (Gellish)
2	30	190	185,2
3	31	189	184,773
4	32	188	184,332
5	33	187	183,877

Quelle formule faut-il insérer dans la cellule C2 puis recopier vers le bas, pour pouvoir compléter la colonne FCMC $g(a)$ (Gellish) ?

EXERCICE 5 — 8 POINTS

Un TeraWattheure est noté: 1 TWh.
La géothermie permet la production d'énergie électrique grâce à la chaleur des nappes d'eau souterraines.
Le graphique ci-contre représente les productions d'électricité par différentes sources d'énergie en France en 2014.



Statistiques de l'électricité en France 2014 RTE - chiffres de production 2014 - EDF

1. (a) Calculer la production totale d'électricité en France en 2014.

(b) Montrer que la proportion d'électricité produite par les Autres énergies (dont la géothermie) est environ égale à 5,7 %.

2. Le tableau suivant présente les productions d'électricité par les différentes sources d'énergie, en France, en 2013 et en 2014.

	Thermique à flamme	Hydraulique	Autres énergies (dont la géothermie)	Nucléaire
Production en 2013 (en TWh)	43,5	75,1	28,1	403,8
Production en 2014 (en TWh)	25,8	67,5	31	415,9
Variation de production entre 2013 et 2014	$-40,7\,\%$	$-10,1\,\%$	$+10,3\,\%$	$+3\,\%$

Alice et Tom ont discuté pour savoir quelle est la source d'énergie qui a le plus augmenté sa production d'électricité.

Tom pense qu'il s'agit des Autres énergies (dont la géothermie) et Alice pense qu'il s'agit du Nucléaire .

Quel est le raisonnement tenu par chacun d'entre eux ?

3. La centrale géothermique de Rittershoffen (Bas Rhin) a été inaugurée le 7 juin 2016. On y a creusé un puits pour capter de l'eau chaude sous pression, à 2,500 m de profondeur, à une température de 170 degrés Celsius.

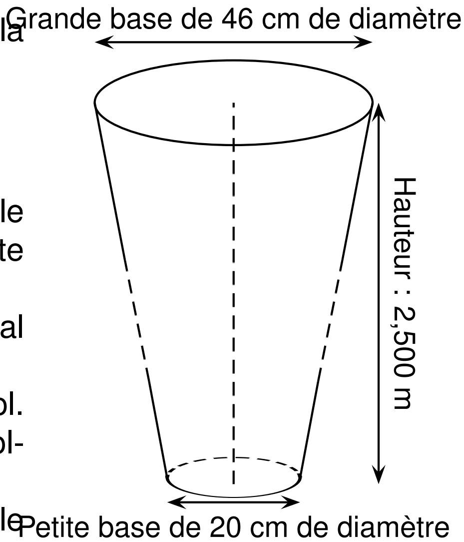
Ce puits a la forme du tronc de cône représenté ci-contre.
Les proportions ne sont pas respectées.
On calcule le volume d'un tronc de cône grâce à la formule suivante:

$$V = \frac{\pi}{3} \times h \times \left(R^2 + R \times r + r^2\right)$$

où h désigne la hauteur du tronc de cône, R le rayon de la grande base et r le rayon de la petite base.

a. Vérifier que le volume du puits est environ égal à 225 m^3.

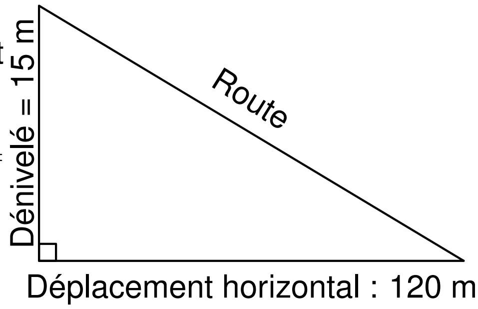
b. La terre est tassée quand elle est dans le sol. Quand on l'extrait, elle n'est plus tassée et son volume augmente de 30 %.
Calculer le volume final de terre à stocker après le forage du puits.



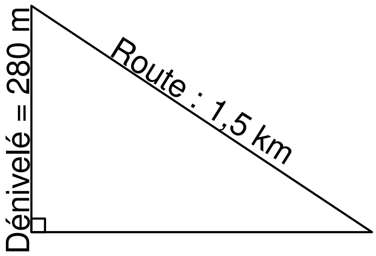
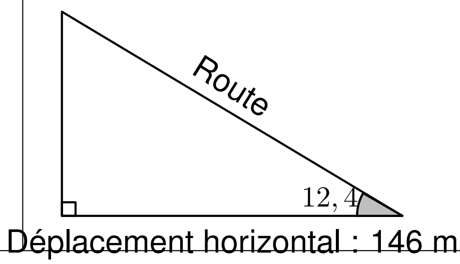
EXERCICE 6 — 7 POINTS

On obtient la pente d'une route en calculant le quotient du dénivelé (c'est-à-dire du déplacement vertical) par le déplacement horizontal correspondant. Une pente s'exprime sous forme d'un pourcentage.

Sur l'exemple ci-contre, la pente de la route est :
$\dfrac{\text{dénivelé}}{\text{déplacement horizontal}} = \dfrac{15}{120} = 0,125 = 12,5\,\%$.



Classer les pentes suivantes dans l'ordre décroissant, c'est-à-dire de la pente la plus forte à la pente la moins forte.

<table>
<tr><td>Route descendant du château des Adhémar, à Montélimar.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Tronçon d'une route descendant du col du Grand Colombier (Ain).</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Tronçon d'une route descendant de l'Alto de l'Angliru (région des Asturies, Espagne).</td><td>
</td></tr>
</table>

EXERCICE 7 — 5 POINTS

Alban souhaite proposer sa candidature pour un emploi dans une entreprise. Il doit envoyer dans une seule enveloppe: 2 copies de sa lettre de motivation et 2 copies de son Curriculum Vitæ (CV). Chaque copie est rédigée sur une feuille au format A4.

1. Il souhaite faire partir son courrier en lettre prioritaire. Pour déterminer le prix du timbre, il obtient sur internet la grille de tarif d'affranchissement suivante:

Lettre prioritaire	
Masse jusqu'à	Tarifs nets
20 g	0,80 €
100 g	1,60 €
250 g	3,20 €
500 g	4,80 €
3 kg	6,40 €

   Le tarif d'affranchissement est-il proportionnel à la masse d'une lettre ?

2. Afin de choisir le bon tarif d'affranchissement, il réunit les informations suivantes:

   - Masse de son paquet de 50 enveloppes : 175 g.
   - Dimensions d'une feuille A4 : 21 cm de largeur et $29,7$ cm de longueur.
   - Grammage d'une feuille A4 : 80 g/m^2 (le grammage est la masse par m^2 de feuille).

   Quel tarif d'affranchissement doit-il choisir ?

Correction

Exercice 1 — 5 points

1. $E = x \times 2x + x \times 3 - 2 \times 2x - 2 \times 3 - 3x + 6$
   $E = 2x^2 + 3x - 4x - 6 - 3x + 6$
   $E = 2x^2 - 4x$.
2. $(x-2)$ est un facteur commun de la différence, donc
   $E = (x-2)[(2x+3) - 3]$
   $E = (x-2)[2x+3-3]$
   $E = (x-2) \times 2x = 2x(x-2) = 2F$.
3. $(x-2)(2x+3) - 3(x-2) = 0$ si et seulement si $2x(x-2) = 0$ soit
   $\left\{\begin{array}{lcl} 2x &=& 0 \quad \text{ou} \\ x-2 &=& 0 \end{array}\right.$ soit $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 0 \quad \text{ou} \\ x &=& 2 \end{array}\right.$
   Les solutions sont 0 et 2.

Exercice 2 — 6 points

1. On a $p(13) = \dfrac{1}{20}$.
2. Sur 20 boules, 10 portent un numéro pair, donc $p(\text{pair}) = \dfrac{10}{20} = \dfrac{1}{2}$.

3. Entre 1 et 20 ces deux nombres compris, les multiples de 4 sont : 4, 8, 12, 16 et 20 : il y a en a donc 5.
   $p(\text{multiple de } 4) = \dfrac{5}{20} = \dfrac{5 \times 1}{5 \times 4} = \dfrac{1}{4}$.
   Les diviseurs de 4 sont : 1, 2, et 4. Donc
   $p(\text{diviseur de } 4) = \dfrac{3}{20}$.
   Comme $\dfrac{3}{20} < \dfrac{5}{20}$, la probabilité d'obtenir un multiple de 4 est plus grande que celle d'obtenir un diviseur de 4.

4. Les naturels premiers entre 1 et 20, sont :
   2, 3, 5, 7, 11 , 13 17, 19, soit 8 naturels. Donc
   $p(\text{premier}) = \dfrac{8}{20} = \dfrac{4\times}{4 \times 5} = \dfrac{2}{5}$.

EXERCICE 3 **7 POINTS**

1. (a) $x = 5$
   étape 1 $= 6 \times 5 = 30$
   étape 2 $= 30 + 10 = 40$
   résultat $= 40 : 2 = 20$
   dire J'obtiens finalement 20 .
   (b) $x = 7$
   étape 1 $= 6 \times 7 = 42$
   étape 2 $= 42 + 10 = 52$
   résultat = $52 : 2 = 26$
   dire J'obtiens finalement 26 .

2. Pour retrouver le nombre du départ il faut remonter l'algorithme, d'où
   résultat $= 8$ entraine que étape 2 $= 8 \times 2 = 16$
   étape 1 $= 16 - 10 = 6$
   $x = 1$
   Julie a choisi le nombre 1.

3. étape 1 $= 6 \times x = 6x$
   étape 2 $= 6x + 10$
   résultat $= (6x + 10) : 2 = \dfrac{6x + 10}{2} = \dfrac{2(3x + 5)}{2} = 3x + 5$, ou encore
   $= (6x + 10) : 2 = 6x : 2 + 10 : 2 = 3x + 5$.

4. Soit x le nombre choisi.

   Le programme de Maxime donne : $(x+2)\times 5 = 5(x+2) = 5x+10$.

   On veut que $5x+10 = 3x+5$, d'où

   $5x-3x+10 = 3x-3x+5$

   $2x+10 = 5$, puis

   $2x+10-10 = 5-10$

   $2x = -5$, d'où $\dfrac{1}{2}\times 2x = -5\times\dfrac{1}{2}$ et enfin

   $x = \dfrac{-5}{2} = \dfrac{-25}{10} = -2,5.$

   Si on choisit $\dfrac{-5}{2} = -2,5$, les deux programmes donnent le même résultat.

EXERCICE 4 — 7 POINTS

1. $\dfrac{18}{15} = \dfrac{x}{60}$. Sa fréquence cardiaque est donc $\dfrac{18\times 60}{15} = 72$ pulsations par minute.

   Ou en supposant les pulsations régulières sur 60 secondes :

   18 en 15 (s) donnent 36 en 30 (s) et 72 en 60 (s).

2. Il y a $\dfrac{60}{0,8} = \frac{600}{8} = \dfrac{8\times 75}{8\times 1} = 75$ intervalles donc 76 pulsations/min.

3. (a) L'étendue est la différence entre la plus haute et la plus basse fréquence : E $= 182-65 = 117$ pulsations /min.

   (b) On divise le nombre total de pulsation par la fréquence moyenne, d'où

   $\dfrac{3{,}640}{130} = 28$ minutes.

   L'entrainement a duré environ 28 minutes.

4. (a) Denis a 32 ans, donc sa FCMC est $f(32) = 220-32 = 188$ pulsations/minute.

   (b) Pour une personne de 15 ans, la FCMC est $f(15) = 220-15 = 205$ pulsations/minute.

   La FCMC de Denis est inférieure à la FCMC d'une personne de 15 ans.

5. $= 191,5 - 0,007 *$ A2 $*$ A2.

EXERCICE 5 — 8 POINTS

1. (a) La production totale d'électricité en France en 2014 est égale à :

   $25,8+67,5+31+415,9 = 540,2$ TWh

   (b) La proportion d'électricité produite par les Autres énergies (dont la géothermie) est :

   $\dfrac{31}{540,2} \approx 0,0574$ soit environ $0,057 = 5,7\,\%$.

2. Tom considère les pourcentages : ce sont les autres énergies qui ont le plus augmenté leur production par rapport à la production de 2013.

   Alice a calculé les variations de production en TWh : avec une augmentation de 12,1 TWh, c'est la nucléaire qui a le plus augmenté sa production (en quantité), alors que les autres énergies ont augmenté de $31 - 28,1 = 2,9$ TWh.

3. (a) $R = 23$ cm $= 0,23$ m ; $r = 10$ cm $= 0,1$ m
   $V = \frac{\pi}{3} \times 2{,}500 \times (0,23^2 + 0,23 \times 0,1 + 0,1^2) \approx 225$ m^3.

   (b) Augmenter de 30 % c'est multiplier par $1 + \frac{30}{100}$, d'où
   $V_{\text{terre extraite}} = 225\left(1 + \frac{30}{100}\right) = 225 \times 1,30 = 292,5$ m^3.

EXERCICE 6 **7 POINTS**

- Route descendant du château des Adhémar, à Montélimar. La pente est égale à 24 %.
- Tronçon d'une route descendant du col du Grand Colombier (Ain) : Le triangle est rectangle.

On appelle d le déplacement horizontal.
D'après l'égalité de Pythagore, on a : $d^2 = 1{,}500^2 - 280^2 = 2{,}171{,}600$.
$d = \sqrt{2{,}171{,}600} \approx 1{,}474$ m.
Donc la pente est égale à $\frac{280}{1{,}474} \approx 18,9\,\%$.

- Tronçon d'une route descendant de l'Alto de l'Angliru (région des Asturies, Espagne) : le triangle est rectangle,

donc $\tan 12,4 = \frac{\text{dénivelé}}{146}$, d'où dénivelé $= 146 \times \tan 12,4 \approx 32,10$ (m).
La pente est égale à $\frac{32,10}{146} \approx 21,98\,\%$ soit environ 22 %.

- On pouvait aussi simplement dire que $\tan 12,4 = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} = \frac{\text{dénivelé}}{\text{déplacement horizontal}} \approx 0,22 = 22\,\%$.
- Classement :

1. Route descendant du château des Adhémar, à Montélimar
2. Tronçon d'une route descendant de l'Alto de l'Angliru (région des Asturies, Espagne)
3. Tronçon d'une route descendant du col du Grand Colombier (Ain)

EXERCICE 7 **5 POINTS**

1. Si le tarif était proportionnel à la masse, la lettre de $100 = 5 \times 20$ (g) devrait être affranchie $5 \times 0,80 = 4$ €. Non, le tarif n'est pas proportionnel à la masse.

2. Il lui faut 1 enveloppe et 4 pages.
   - Une enveloppe a un poids de $\frac{175}{50} = \frac{350}{100} = 3,5$ g.
   - Une feuille a une aire de :

$0,21 \times 0,297 = 0.062{,}37$ m^2 et donc un poids de :

$0.062{,}37 \times 80 = 4.989{,}6$.

4 feuilles ont donc un poids de $4 \times 4.989{,}6 = 19.958{,}4$

Masse totale d'un courrier (sans compter sur le poids du timbre !) :

3,5 + 19.958,4 = 23.458,4 g. Il dépasse 20 g.

Il doit donc payer 1,60 €.