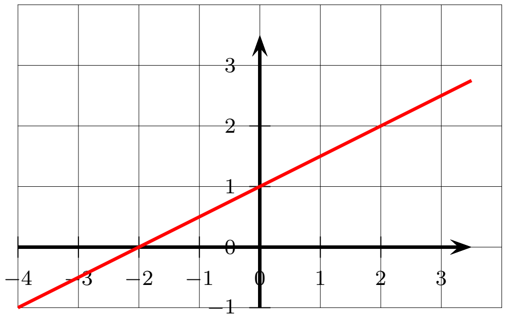
Exercice 1 — 20 points

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM).
Pour chaque question, quatre affirmations sont proposées. **Une seule affirmation est exacte.**
Sur la copie, écrire le numéro de la question et l'affirmation choisie. Aucune justification n'est attendue.

1. ABC est un triangle tel que AB = 20 cm, BC = 21 cm et AC = 29 cm. On peut affirmer que:

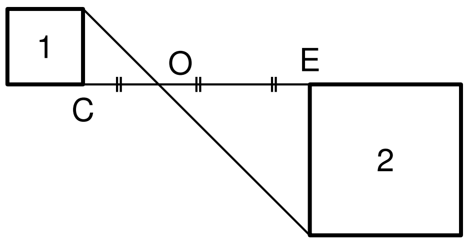
ABC est un triangle ABC en A	ABC est un triangle rectangle en B	ABC est un triangle rectangle en C	ABC n'est pas un triangle rectangle

2. Voici la représentation graphique d'une fonction f.
La fonction f est définie par:



$f(x) = 2x - 2$	$f(x) = 2x + 1$	$f(x) = \dfrac{x}{2} - 2$	$f(x) = \dfrac{x}{2} + 1$

3. Sur la figure ci-contre, le carré 2 est l'image du carré 1 par :



la symétrie centrale de centre O	la translation qui transforme C en E	l'homothétie de centre O et de rapport 2	l'homothétie de centre O et de rapport -2

4. Le cocktail Bora-Bora est composé de jus d'ananas, de jus de fruit de la passion et de jus de citron dans le ratio de 10 : 6 : 2. Pour réaliser 90 cL de ce cocktail, il faut prévoir exactement :

6 cL de jus de fruit de la passion	30 cL de jus de fruit de la passion	54 cl de jus de fruit de la passion	45 cL de jus de fruit de la passion

5. Un maraîcher a cueilli 408 pommes et 168 poires. Il décide de remplir des sacs pour ses clients comportant chacun le même nombre de pommes et le même nombre de poires, en utilisant tous les fruits cueillis.

   Le plus grand nombre de sacs qu'il peut ainsi remplir est :

48 sacs	24 sacs	8 sacs	6 sacs

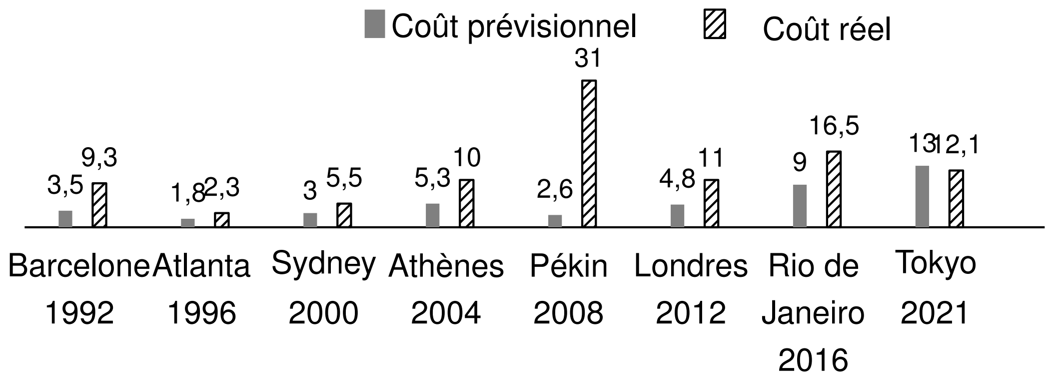
Exercice 2 **17 points**

Les jeux Olympiques (JO) d'été ont généralement lieu tous les 4 ans.
Dans cet exercice, on s'intéresse aux coûts d'organisation des dernières éditions des JO d'été.
On rappelle que le coût est l'ensemble des dépenses entraînées par l'organisation des JO.
On précise que :

- le **coût prévisionnel** désigne les dépenses prévues par les organisateurs avant l'édition des JO ;
- le **coût réel** désigne les dépenses réelles qui ont été nécessaires pour l'organisation des JO.

Le graphique ci-dessous compare ces deux coûts pour les dernières éditions des JO d'été.

Comparaison entre le coût prévisionnel et le coût réel de chaque édition des JO depuis 1992, en milliard d'euros



La crise sanitaire de la Covid-19 a décalé à 2021 les Jeux Olympiques de Tokyo prévus en 2020.

1. Entre 1992 et 2021, combien d'éditions ont eu un coût réel supérieur ou égal à 10 milliards d'euros ?
2. Calculer le pourcentage d'augmentation entre le coût prévisionnel et le coût réel lors de l'édition des JO de Rio de Janeiro 2016, arrondi à l'unité.
3. Montrer que le coût réel moyen entre 1992 et 2021 est $12,2$ milliards d'euros, arrondi au dixième de milliard.
4. **Questions de journalistes**

   (a) Un journaliste mentionne que le coût réel moyen des JO sur la période 1992 à 2021 est de $12,2$ milliards d'euros. Il poursuit en affirmant: Cela signifie que la moitié des éditions entre 1992 et 2021 ont un coût réel supérieur à 12,2 milliards d'euros.
   Que penser de cette affirmation ?

   (b) Le coût prévisionnel moyen entre 1992 et 2024 est de l'ordre de $5,5$ milliards d'euros.
   Une journaliste cherche à connaître le coût prévisionnel des JO de Paris 2024 pour préparer son intervention télévisée.
   Calculer le coût prévisionnel des JO de Paris 2024 qu'elle devrait annoncer.

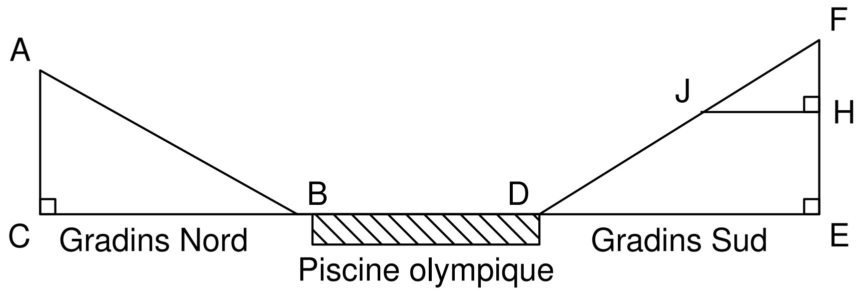
Exercice 3 — 22 points

La construction du Centre Aquatique Olympique de Saint-Denis a débuté en 2021 pour accueillir les épreuves de natation artistique des jeux Olympiques de Paris 2024.

Alyssa et Jules visitent le Centre Aquatique Olympique et s'installent dans les gradins.

On a schématisé leurs positions par rapport à la piscine olympique sur la figure ci-dessous, qui modélise la situation : Alyssa est installée dans les gradins Nord au point A et Jules est assis dans les gradins Sud au point J.

La figure n'est pas à l'échelle.

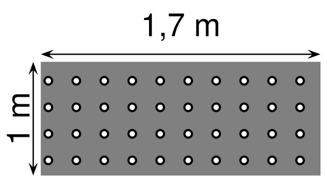


On donne : AC = FJ $= 15$ m ; BC $= 27$ m ; FH $= 7$ m ; EF $= 18$ m.
Les points F, J et D sont alignés.
Les points F, H, et E sont alignés.
Les points C, B, D, E sont alignés.

1. Jules et Alyssa discutent entre eux pour savoir qui est le mieux placé pour assister à l'événement.
   (a) Calculer la distance entre Alyssa et le bord de la piscine, c'est-à-dire calculer la longueur AB. Arrondir le résultat au mètre près.
   (b) Vérifier que la distance entre Jules et le bord de la piscine, c'est-à-dire la longueur JD, est de 24 m, arrondie au mètre près.
   (c) En déduire lequel des deux amis est le plus proche d'un bord de la piscine.
2. Pour respecter les normes de sécurité, l'angle d'inclinaison $\widehat{\text{ABC}}$ des gradins Nord ne doit pas dépasser 35. Les gradins Nord respectent-ils cette norme ?
3. Le toit du Centre Aquatique Olympique a une surface de 5,000 m^2.

   On estime que 4,678.4 m^2 de ce toit est recouvert de panneaux photovoltaïques.

   Voici les caractéristiques d'un panneau photovoltaïque standard fournies par le constructeur:

   Dimensions : 1 m de large et 1,7 m de long
   Énergie produite: environ 350 kWh par an

   Montrer que la quantité annuelle d'énergie produite par l'ensemble des panneaux photovoltaïques du toit du Centre Aquatique Olympique est de 963,200 kilowattheures (kWh).

4. La température règlementaire de l'eau contenue dans la piscine lors des jeux Olympiques doit être comprise entre 25 et 28. Pour respecter cette réglementation, on souhaite que l'eau contenue dans la piscine olympique de Saint-Denis soit à une température de 26. On admet que l'eau contenue dans cette piscine occupe un pavé droit dont les dimensions sont:

   - Longueur : 50 m
   - Largeur: 25 m
   - Profondeur: 3 m

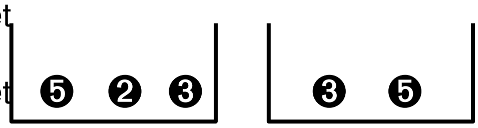
   On suppose qu'avant la première mise en chauffe de la piscine olympique, l'eau est à 18.

   On estime qu'il faut environ $9,3$ kWh pour chauffer 1 m^3 d'eau de 18 jusqu'à 26.

   Quelle quantité d'énergie, en kWh, sera nécessaire pour chauffer toute l'eau de la piscine olympique jusqu'à 26 ?

Exercice 4 — 18 points

On dispose de deux boîtes contenant des boules numérotées, indiscernables au toucher.
La première boîte contient trois boules numérotées 2, 3 et 5.
La deuxième boîte contient deux boules numérotées 3 et 5.



On tire au hasard une boule dans la première boîte puis une boule dans la deuxième boîte.
On s'intéresse au produit des nombres inscrits sur ces deux boules.
Par exemple, si on tire la boule numérotée 2 dans la première boîte puis la boule numérotée 5 dans la deuxième boîte, on obtient comme résultat: $2 \times 5 = 10$.

1. Compléter le tableau à double entrée afin de faire apparaître tous les résultats possibles de cette expérience.

1er tirage \ 2e tirage	3	5
5		
2		10
3		

$2 \times 5 = 10$

2. Quelle est la probabilité d'obtenir 15 comme résultat ?

3. L'affirmation suivante est-elle vraie ?

   Affirmation : Il y a 2 chances sur 3 d'obtenir un multiple de 3.

4. On ajoute une troisième boîte contenant deux boules numérotées avec des nombres entiers.

   On tire au hasard une boule dans la première boîte, puis une boule dans la deuxième boîte, puis une boule dans la troisième boîte.

   On multiplie les nombres inscrits sur ces boules et on s'intéresse au produit de ces trois nombres. Anissa a obtenu comme résultat 165 et Bilel a obtenu 78.

   Quels sont les nombres inscrits sur les boules de la troisième boîte?

Exercice 5 — 23 points

Dans cet exercice, les deux parties sont indépendantes.
On considère les fonctions f et g définies par

$$f(x) = (x+2)^2 - x \quad \text{et} \quad g(x) = 7x + 4.$$

Partie A

1. Calculer $f(-4)$.
2. Déterminer un antécédent de 3 par la fonction g.

Partie B

Trois élèves, Paul, Jane et Morgane, cherchent à résoudre l'équation $f(x) = g(x)$ par trois méthodes différentes.

1. Paul utilise un tableur.

   Il calcule ainsi les images des entiers compris entre -3 et 3 par les fonctions f et g.

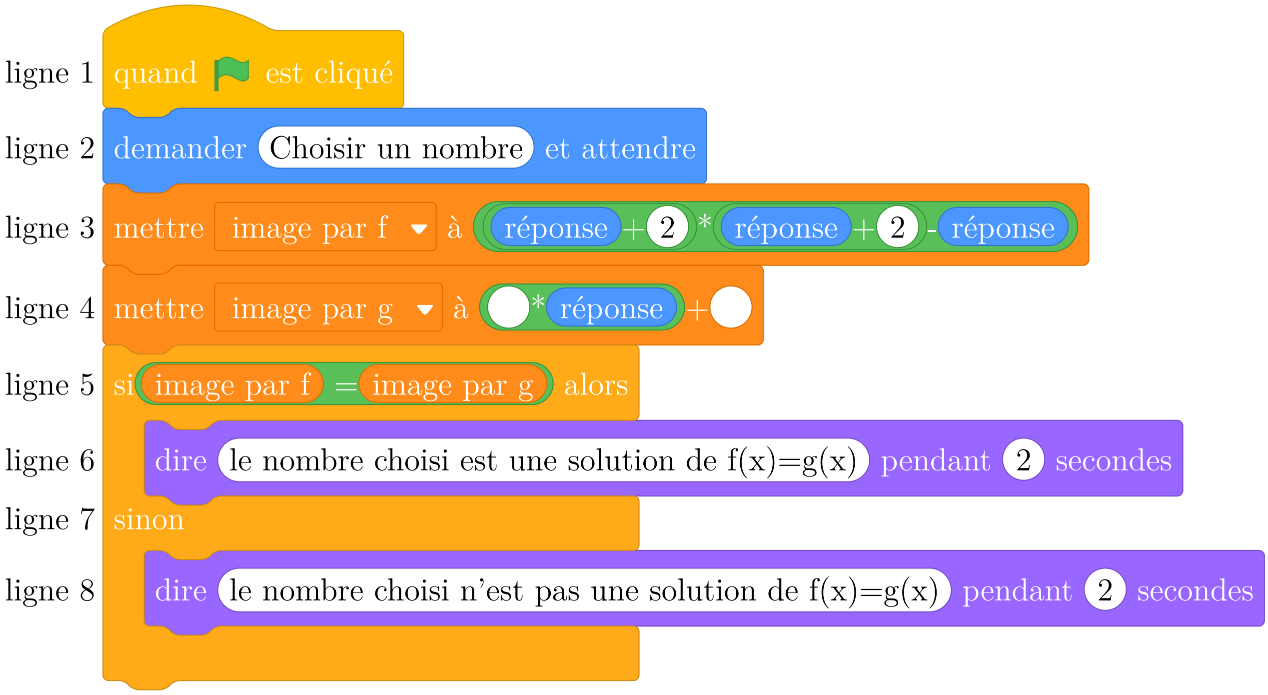
	A	B	C	D	E	F	G	H
1	x	-3	-2	-1	0	1	2	3
2	$f(x)$	4	2	2	4	8	14	22
3	$g(x)$	-17	-10	-3	4	11	18	25

   (a) Quelle formule a-t-il saisie en cellule B3 puis étirée vers la droite pour compléter la ligne 3 du tableau ?

   (b) Avec cette méthode, quelle(s) solution(s) trouve-t-il à l'équation $f(x) = g(x)$?

2. Jane utilise un logiciel de programmation.

   Le programme suivant qu'elle a créé permet de tester l'égalité $f(x) = g(x)$ pour une valeur de x choisie par l'utilisateur.



Elle décide de tester toutes les valeurs entières entre -5 et 3.

(a) Compléter sur le programme précédent, la ligne 4 du programme de Jane afin d'obtenir l'image par la fonction g du nombre choisi.

(b) Quelle réponse donne le programme si le nombre choisi est 0 ?

(c) En déduire une solution de l'équation $f(x) = g(x)$.

3. Morgane décide de résoudre cette équation par le calcul.

(a) Démontrer que l'équation $f(x) = g(x)$ peut se ramener à l'équation $x^2 - 4x = 0$.

(b) Factoriser l'expression $x^2 - 4x$.

(c) En déduire les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$.

4. Dire pour chaque élève s'il a résolu l'équation $f(x) = g(x)$.

Expliquer pourquoi.

Correction

Exercice 1 — 20 points

1. ABC est un triangle tel que AB = 20 cm, BC = 21 cm et AC = 29 cm.

   • On a $\text{AB}^2 = 20^2 = 400$ et $\text{BC}^2 = 21^2 = 441$. D'où $\text{AB}^2 + \text{BC}^2 = 400 + 441 = 841$.

   D'autre part : $\text{AC}^2 = 29^2 = (30-1)^2 = 30^2 - 2 \times 30 + 1 = 900 - 60 + 1 = 840 + 1 = 841$.

   On a donc $400 + 441 = 841$, soit $\text{AB}^2 + \text{BC}^2 = \text{AC}^2$: d'après la réciproque du théorème de Pythagore la triangle ABC est rectangle en B.

   • Variante avec identité mais sans calculette :

   $\text{AC}^2 - \text{BC}^2 = 29^2 - 21^2 = (29+21)(29-21) = 50 \times 8 = 400 = 20^2 = \text{AC}^2$, d'où : $\text{AC}^2 - \text{BC}^2 = \text{AC}^2$ soit $\text{AC}^2 = \text{BC}^2 + \text{AC}^2$ ...

   • Semblable mais plus technique : $\text{AC}^2 - \text{AB}^2 = 29^2 - 20^2 = (29+20)(29-20) = 49 \times 9 = 7^2 \times 3^2 = (7 \times 3)^2 = 21^2 = \text{BC}^2$, d'où : $\text{AC}^2 - \text{AB}^2 = \text{BC}^2$ soit $\text{AC}^2 = \text{BC}^2 + \text{AC}^2$ ...

2. La droite représente une fonction affine $x \longmapsto ax + b$, avec $a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}$.

   • l'ordonnée à l'origine est égale à $b = 1$;

   • le coefficient directeur de la droite est égal à $\dfrac{1}{2} = a$.

   Conclusion $x \longmapsto f(x) = \dfrac{1}{2}x + 1$.

3. Comme $\overrightarrow{\text{OE}} = -2\overrightarrow{\text{OC}}$ la transformation est l'homothétie de centre O et de rapport -2

4. On a le tableau de proportionnalité suivant :

ananas	passion	citron	cocktail
10	6	2	$10 + 6 + 2 = 18$
	6×5		$90 = 18 \times 5$

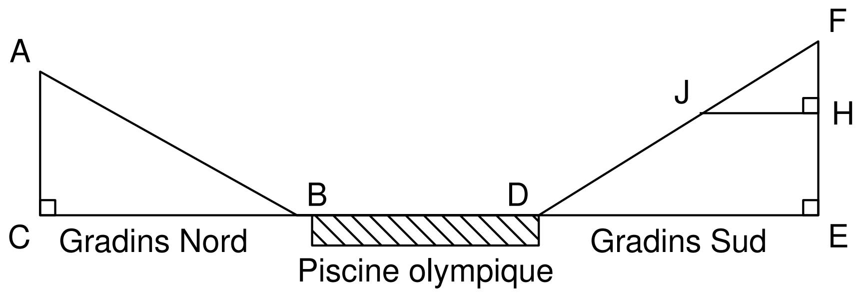
On passe donc de la ligne 2 à la ligne 3 en multipliant par 5, d'où $5 \times 6 = 30$ (cL) de jus de fruit de la passion.

5. • $408 = 4 \times 102 = 4 \times 2 \times 51 = 8 \times 3 \times 17$;
   • $168 = 8 \times 21 = 8 \times 3 \times 7$.
   Donc $408 = 24 \times 17$ et $168 = 24 \times 7$.
   On peut donc faire au maximum 24 sacs identiques contenant chacun 17 pommes et 7 poires.

Exercice 2 — 17 points

1. 4 éditions (5 en comptant Tokyo) ont eu un coût réel supérieur ou égal à 10 milliards d'euros
2. Le pourcentage d'augmentation entre le coût prévisionnel et le coût réel lors de l'édition des JO de Rio de Janeiro 2016 est égal à : $\dfrac{16,5-9}{9} \times 100 \approx 83,3\,\%$ soit environ 83 % à l'unité près.
3. Moyenne du coût réel de 1992 à 2021 :
   $\dfrac{9,3+2,3+5,5+10+31+11+16,5+12,1}{8} = \dfrac{97,7}{8} = 12.212{,}5$, soit 12,2 au dixième de milliard près.
4. (a) Le journaliste confond moyenne et médiane.
   (b) En prenant en compte les budgets prévisionnels depuis (et non entre) 1992 jusqu'à 2024 et en nommant p le coût prévisionnel des JOP(aris), on a donc pour calcul de la moyenne :
   $\dfrac{3,5+1,8+3+5,3+2,6+4,8+9+13+p}{9} = 5,5$, d'où :
   $\dfrac{43,0+p}{9} = 5,5$ puis $43 + p = 9 \times 5,5$ et $p = 9 \times 5,5 - 43 = 6,5$ (milliards d'euros).

Exercice 3 — 22 points



1. (a) Dans le triangle ABC rectangle en C, le théorème de Pythagore permet d'obtenir :
   AB^2 = AC^2+ CB^2 $= 15^2 + 27^2 = 225 + 729 = 954$, d'où QB $= \sqrt{954} = \sqrt{9 \times 106} = \sqrt{6} \times \sqrt{106} = 3\sqrt{6} \approx 30,9$ (m) soit 31 (m) au mètre près.

(b) D'après la figure les droites (JH) et (DE) toutes deux perpendiculaires à la droite (EF) sont parallèles.

Avec l'alignement respectif des points F, J D d'une part et F, H et E de l'autre nous avons don une configuration de Thalès qui permet d'écrire en particulier :

$\dfrac{\text{FJ}}{\text{FD}} = \dfrac{\text{FH}}{\text{FE}}$ ou encore $\dfrac{15}{\text{FD}} = \dfrac{7}{18}$ d'où $15 \times 18 = 7\text{FD} \iff \text{FD} : \dfrac{15 \times 18}{7}$.

On en déduit que JD = FD − FJ, soit $\text{JD} = \dfrac{15 \times 18}{7} - 15 = \dfrac{15 \times 18 - 15 \times 7}{7} = \dfrac{15\times, 11}{7} \approx 23,6$, soit environ 24 (m).

(c) Jules est donc le plus proche de la piscine.

2. Dans le triangle ABC rectangle en C, on a : $\tan \widehat{\text{ABC}} = \dfrac{\text{AC}}{\text{BC}} = \dfrac{15}{27} = \dfrac{5}{9}$.

   La calculatrice donne $\widehat{\text{ABC}} \approx 29,1 < 35$: la norme est respectée

3. Un panneau a une aire de 1,7 m^2, donc $\dfrac{4{,}678.4}{1,7} = 2{,}752$ est le nombre de panneaux.

   Ces 2,752 panneaux produiront $2{,}752 \times 350 = 963{,}200$ (kWh) par an.

4. Le volume d'eau dans la piscine est : $50 \times 25 \times 3 = 1{,}250 \times 3 = 3{,}750$ (m^3).

   Chaque m^3 d'eau nécessitant 9,3 kWh, il faudra pour chauffer la piscine :

$$3{,}750 \times 9,3 = 34{,}875 \text{ (kWh)}.$$

Exercice 4 — 18 points

1.

2e tirage / 1er tirage	3	5
5	15	25
2	6	10
3	9	15

2. Il y a 2 issues 15 sur un total de 6, soit une probabilité de $\dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$.

3. Les sorties multiples de 3 sont 6, 9, 15 et 15, donc la probabilité d'obtenir un multiple de 3 est égale à $\dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$. L'affirmation est vraie.

4. On a $165 = 15 \times 11 = 3 \times 5 \times 11$: le nombre tiré dans la troisième boîte est donc 11 puisqu'il n'est pas dans les deux premières ;

   $78 = 6 \times 13 = 2 \times 13$: le nombre tiré dans la troisième boîte est donc 13 puisqu'il n'est pas dans les deux premières.

   Il y a donc dans la troisième boîte deux boules marquées 11 et 13.

Exercice 5 — 23 points

$$f(x) = (x+2)^2 - x \quad \text{et} \quad g(x) = 7x + 4.$$

Partie A

1. $f(-4) = (-4+2)^2 - (-4) = 4 + 4 = 8$.
2. Il faut trouver x tel que $g(x) = 7x + 4 = 3$ ou $7x = -1$ et $x = -\dfrac{1}{7}$.

   Donc $g\left(-\dfrac{1}{7}\right) = 3$.

Partie B

Trois élèves, Paul, Jane et Morgane, cherchent à résoudre l'équation $f(x) = g(x)$ par trois méthodes différentes.

1. Il calcule ainsi les images des entiers compris entre -3 et 3 par les fonctions f et g.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		-3	-2	-1	0	1	2	3
2	$f(x)$	4	2	2	4	8	14	22
3	$g(x)$	-17	-10	-3	4	11	18	25

   (a) Il a écrit en B3 : =7*B1+4

   (b) Sur cette partie du tableur il voit que les images par f et g sont les mêmes (4) pour $x = 0$.

2. (a)

```
ligne 1  quand [drapeau] est cliqué
ligne 2  demander (Choisir un nombre) et attendre
ligne 3  mettre [image par f] à ((réponse + 2) * (réponse + 2) - réponse)
ligne 4  mettre [image par g] à ((7 * réponse) + 4)
ligne 5  si <(image par f) = (image par g)> alors
ligne 6      dire (le nombre choisi est une solution de f(x)=g(x)) pendant (2) secondes
ligne 7  sinon
ligne 8      dire (le nombre choisi n'est pas une solution de f(x)=g(x)) pendant (2) secondes
```

(b) Réponse : le nombre choisi est une solution de l'équation $f(x) = g(x)$.

(c) On retrouve que 0 est une solution de l'équation $f(x) = g(x)$ puisque, d'après la question précédente, $f(0) = g(0)$

3. (a) On a $f(x) = g(x)$ si et seulement si $(x+2)^2 - x = 7x + 4$ ou en développant :
$x^2 + 4x + 4 - x = 7x + 4$ ou encore $x^2 - 4x = 0$

(b) On a $x^2 - 4x = x(x-4)$

(c) D'après le résultat précédent l'équation $x^2 - 4x = 0$ s'écrit
$x(x-4) = 0$. Or le produit est nul si l'un des deux facteurs est nul soit :
$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ & \text{ou} & \\ x-4 & = & 0 \end{array}\right.$ soit finalement $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ & \text{ou} & \\ x & = & 4 \end{array}\right.$
L'équation a deux solutions : 0 et 4.

4. • Paul n'a pas trouvé toutes les solutions puisqu'il n'a cherché les solutions que parmi ceux qui sont entiers, de -3 à 3.

• Jane a trouvé la solution 4 mais pas la solution 0 : elle n'aura jamais la certitude d'avoir trouvé toutes les solutions puisqu'il lui est impossible d'introduite dans le programme tous les normes entiers.

• Morgane est certaine d'avoir trouvé toutes les solutions puisqu'elle a cherché les nombres solutions de l'équation $f(x) = g(x)$.