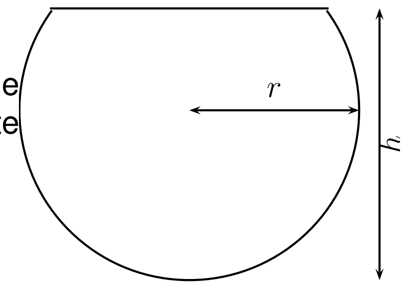
Un aquarium a la forme d'une sphère de 10 cm de rayon, coupée en sa partie haute: c'est une calotte sphérique .
La hauteur totale de l'aquarium est 18 cm.



1. Le volume d'une calotte sphérique est donné par la formule :

$$V = \frac{\pi}{3} \times h^2 \times (3r - h)$$

   où r est le rayon de la sphère et h est la hauteur de la calotte sphérique.

   (a) Prouver que la valeur exacte du volume en cm^3 de l'aquarium est $1{,}296\pi$.

   (b) Donner la valeur approchée du volume de l'aquarium au litre près.

2. On remplit cet aquarium à ras bord, puis on verse la totalité de son contenu dans un autre aquarium parallélépipédique. La base du nouvel aquarium est un rectangle de 15 cm par 20 cm.

   Déterminer la hauteur atteinte par l'eau (on arrondira au cm).

   * Rappel: 1 ℓ = 1 dm^3 $= 1{,}000$ cm^3

Correction

1. (a) $V = \dfrac{\pi}{3} \times h^2 \times (3r - h)$

   $V = \dfrac{\pi}{3} \times 18^2 \times (3 \times 10 - 18)$

   $V = \dfrac{\pi}{3} \times 324 \times (30 - 18)$

   $V = \dfrac{\pi}{3} \times 324 \times 12$

   $V = \dfrac{3{,}888\pi}{3} \approx 1{,}296\pi$ cm^3.

   (b) $V = \dfrac{3{,}888\pi}{3} \approx 1{,}296\pi \approx 4{,}072$ cm^3 soit à peu près $4\ \ell$.

2. Soit h la hauteur atteinte par l'eau dans le nouvel aquarium. On a :

   $15 \times 20 \times h = 1{,}296\pi$

   $300h = 1{,}296\pi$

   $h = \dfrac{1{,}296\pi}{300}$

   $h \approx 14$ cm.

   La hauteur atteinte par l'eau est d'environ 14 cm.