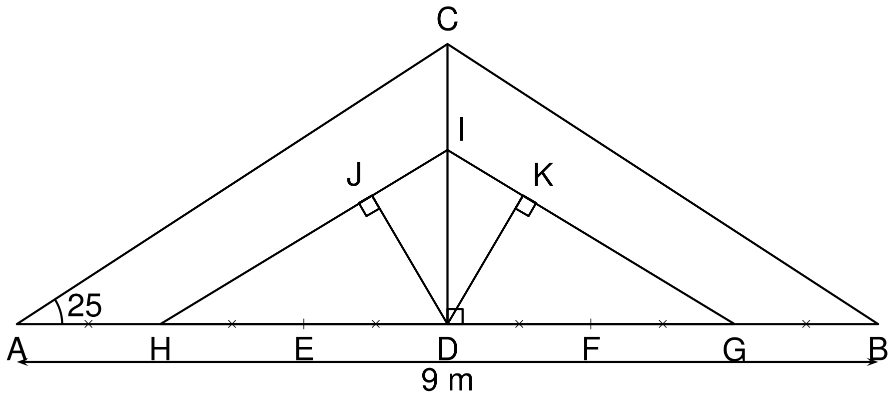
Un charpentier doit réaliser pour un de ses clients la charpente dont il a fait un schéma ci-dessous:



Il ne possède pas pour le moment toutes les dimensions nécessaires pour la réaliser mais il sait que :

- la charpente est symétrique par rapport à la poutre [CD],
- les poutres [AC] et [HI] sont parallèles.

Vérifier les dimensions suivantes, calculées par le charpentier au centimètre près.
Toutes les réponses doivent être justifiées.

1. Démontrer que hauteur CD de la charpente est égale à 2,10 m.
2. Démontrer, en utilisant la propriété de Pythagore, que la longueur AC est égale à 4,97 m.
3. Démontrer, en utilisant la propriété de Thalès, que la longueur DI est égale à 1,40 m.
4. Proposer deux méthodes différentes pour montrer que la longueur JD est égale à 1,27 m. On ne demande pas de les rédiger mais d'expliquer la démarche.

Correction

1. Puisque (CD) est axe de symétrie de la figure, elle est perpendiculaire au segment [AB] en son milieu D. Le triangle CAD est donc rectangle en D et AD = 4,5 m.

   On a dans ce triangle $\tan \widehat{\text{A}} = \dfrac{\text{CD}}{\text{AD}}$, donc

   $\text{CD} = \tan 25 \times 4,5 \approx 2,098$ soit 2,10 m au centimètre près.

2. Le théorème de Pythagore dans le triangle ACD s'écrit :

   $\text{AC}^2 = \text{AD}^2 + \text{DC}^2$, soit $\text{AC}^2 = 4,5^2 + 2,1^2 = 20,25 + 4,41 = 24,66$, donc

   $\text{AC} = \sqrt{24,66} \approx 4,965$ soit 4,97 m au centimètre près.

3. On a d'après la figure $\text{DH} = \dfrac{2}{3} \times \text{DH} = \dfrac{2}{3} \times 4,5 = 3$.

   Les droites (AC) et (HI) étant parallèles, les D, H, A d'une part, D, I, C d'autre part étant alignés dans cet ordre, le théorème de Thalès s'applique et s'écrit :

   $\dfrac{\text{DH}}{\text{DA}} = \dfrac{\text{DI}}{\text{DC}} = \dfrac{\text{HI}}{\text{AC}}$.

   En particulier $\dfrac{\text{DH}}{\text{DA}} = \dfrac{\text{DI}}{\text{DC}}$ soit $\dfrac{3}{4,5} = \dfrac{\text{DI}}{2,1}$ soit $\text{DI} = 2,1 \times \dfrac{2}{3} = 1,4$ (m).

4. *Méthode* 1 : dans le triangle HDJ rectangle en J, on a $\widehat{\text{JHD}} = 25$ car les poutres [AC] et [HI] sont parallèles ; on a donc $\sin \widehat{\text{JHD}} = \dfrac{\text{DJ}}{\text{DH}}$ donc $\text{DJ} = \text{DH} \times \sin \widehat{\text{JHD}} = 3 \times \sin 25 \approx 1,267$, soit 1,27 m au centimètre près.

   Méthode 2 : on calcule l'aire du triangle rectangle HDI :

   $\dfrac{1}{2} \times \text{HI} \times \text{DJ} = \dfrac{1}{2} \times \text{DH} \times \text{DI}$.

   Il reste à calculer IH grâce au théorème de Pythagore toujours dans ce triangle HDI.

   On a $\text{HI} = \sqrt{3^2 + 1,4^2} \approx 3,311$.

   On a ensuite $\text{DJ} = \dfrac{\text{DH} \times \text{DI}}{\text{HI}} \approx \dfrac{3 \times 1,4}{3,311} \approx 1,268$: on retrouve 1,27 m au centimètre près.