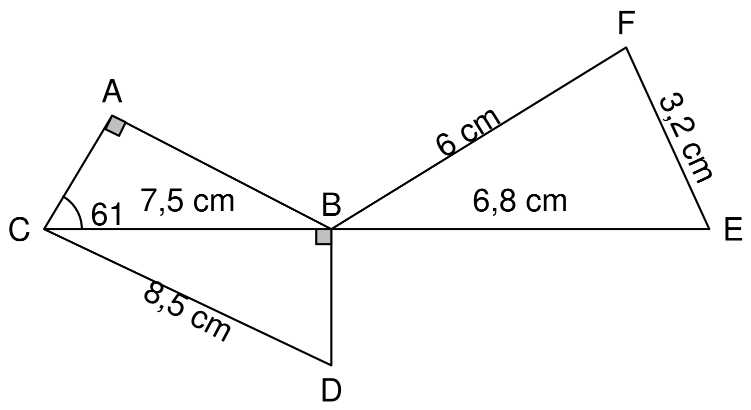
Exercice Première Spécialité - 2018 - Ex 4 : Trigonométrie et Triangles Semblables

Trigonométrie

La figure ci-dessous n'est pas représentée en vraie grandeur.
Les points C, B et E sont alignés.
Le triangle ABC est rectangle en A.
Le triangle BDC est rectangle en B.



1. Montrer que la longueur BD est égale à 4 cm.
2. Montrer que les triangles CBD et BFE sont semblables.
3. Sophie affirme que l'angle $\widehat{BFE}$ est un angle droit. A-t-elle raison?
4. Max affirme que l'angle $\widehat{ACD}$ est un angle droit. A-t-il raison ?

Correction

1. Le triangle CBD est rectangle en B. Le théorème de Pythagore s'écrit : $\text{CD}^2 = \text{DB}^2 + \text{CB}^2$, soit $\text{DB}^2 = \text{CD}^2 - \text{CB}^2 = 8,5^2 - 7,5^2 = (8,5 + 7,5)(8,5 - 7,5) = 6 \times 1 = 16 = 4^2$.

   $\text{DB} = 4$ (cm).

2. Deux triangles semblables ont les mesures de leurs côtés proportionnelles.

   Or $\dfrac{6}{7,5} = 0,8$, $\quad \dfrac{3,2}{4} = 0,8$ et $\dfrac{6,8}{8,5} = 0,8$

   Par conséquent les triangles CBD et BFE sont semblables.

3. Vérifions que le triangle BFE est rectangle :

   - $\text{BE}^2 = 6,8^2 = 46,24$, $\quad \text{BF}^2 = 6^2 = 36$ et $\text{FE}^2 : 3,2^2 = 10,24$.

   $\text{BF}^2 + \text{FE}^2 = 36 + 10,24 = 46,24$.

   Donc $\text{BE}^2 = \text{BF}^2 + \text{FE}^2$ et par la réciproque de Pythagore le triangle BEF est rectangle en F.

   - Plus rapide : les triangles CBD et BFE étant semblables, on a $\widehat{\text{CBD}} = \widehat{\text{BFE}} = 90$ puisque le triangle CBD est rectangle en B.

4. Calculons l'angle $\widehat{\text{DCB}}$ par son cosinus dans le triangle rectangle DCB :

   $\cos \widehat{\text{DCB}} = \dfrac{\text{CB}}{\text{CD}} = \dfrac{7,5}{8,5} = \dfrac{75}{85} = \dfrac{15}{17}$. La calculatrice donne $\cos^{-1} \dfrac{15}{17} \approx 28$.

   Or : $28 + 61 = 89 \neq 90$: l'angle $\widehat{\text{ACD}}$ n'est pas droit.