1. (a) Déterminer la décomposition en produit de facteurs premiers de 2,744.
   (b) En déduire la décomposition en produit de facteurs premiers de $2{,}744^2$.
   (c) À l'aide de cette décomposition, trouver x tel que $x^3 = 2{,}744^2$.

2. Soient a et b deux nombres entiers supérieurs à 2 tels que $a^3 = b^2$.
   (a) Calculer b lorsque $a = 100$.
   (b) Déterminer deux nombres entiers a et b supérieurs à 2 et inférieurs à 10 qui vérifient l'égalité $a^3 = b^2$.

Correction

1. (a) 2,744 est multiple de 4 : $2{,}744 = 4 \times 686 = 4 \times 2 \times 343$.
   Or $343 = 350 - 7 = 7 \times 50 - 7 \times 1 = 7 \times 49 = 7 \times 7 \times 7$.
   Donc $2{,}744 = 2^3 \times 7^3$.

   (b) Le résultat précédent entraîne :
   $2{,}744^2 = \left(2^3 \times 7^3\right)^2 = \left(2^3\right)^2 \times \left(7^3\right)^2 = 2^6 \times 7^6$.

   (c) Inversement le résultat précédent peut s'écrire :
   $2{,}744^2 = 2^6 \times 7^6 = \left(2^2\right)^3 \times \left(7^2\right)^3 = \left(2^2 \times 7^2\right)^3 = (4 \times 49)^3 = 196^3$.

2. (a) On a donc$100^3 = b^2$ ou $1{,}000{,}000 = b^2$, d'où $b = 1{,}000$.

   (b)
   - Si $a = 3,\ a^3 = 27$ qui n'est pas un carré ;
   - Si $a = 4,\ a^3 = 64$ qui est le carré de 8 ;
   - Si $a = 5,\ a^3 = 125$ qui n'est pas un carré ;
   - Si $a = 6,\ a^3 = 216$ qui n'est pas un carré ;
   - Si $a = 7,\ a^3 = 343$ qui n'est pas un carré ;
   - Si $a = 8,\ a^3 = 512$ qui n'est pas un carré ;
   - Si $a = 9,\ a^3 = 729$ qui est le carré de 27, mais $27 > 10$.

   Il y a donc une solution : $4^3 = 8^2$.