Exercice Première Spécialité - 2019 - Ex 2 : Trigonométrie et Triangles Semblables

Trigonométrie Géométrie repérée

Dans cet exercice, on donnera, si nécessaire, une valeur approchée des résultats au centième près.

Pour construire le décor d'une pièce de théâtre (*Figure 1*), Joanna dispose d'une plaque rectangulaire ABCD de 4 m sur 2 m dans laquelle elle doit découper les trois triangles du décor avant de les superposer. Elle propose un découpage de la plaque (*Figure 2*).

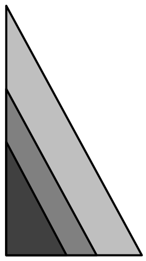

Figure 1

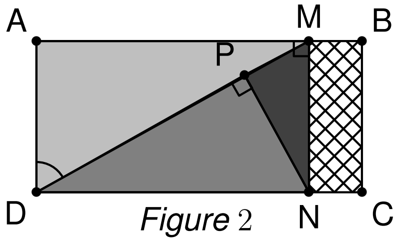

Figure 2

Le triangle ADM respecte les conditions suivantes :

- le triangle ADM est rectangle en A
- AD = 2 m
- $\widehat{\text{ADM}} = 60$

1. Montrer que [AM] mesure environ $3,46$ m.
2. La partie de la plaque non utilisée est représentée en quadrillé sur la figure 2.

   Calculer une valeur approchée au centième de la proportion de la plaque qui n'est pas utilisée.
3. Pour que la superposition des triangles soit harmonieuse, Joanna veut que les trois triangles AMD, PNM et PDN soient semblables. Démontrer que c'est bien le cas.
4. Joanna aimerait que le coefficient d'agrandissement pour passer du triangle PDN au triangle AMD soit plus petit que $1,5$. Est-ce le cas ? Justifier.

Correction

1. Dans ADM rectangle en A, on a $\tan \widehat{\text{ADM}} = \dfrac{\text{côté opposé à D}}{\text{côté adjacent à D}} = \dfrac{\text{AM}}{\text{AD}}$, soit $\tan(60) = \frac{\text{AM}}{2}$, d'où

   AM $= 2 \times \tan 60 \approx 3.464{,}1$ soit 3,46 m au centième près.

   [AM] mesure environ 3,46 m.

2. Comme M appartient à [AB], on a MB $=$ AB $-$ AM, soit MB $\approx 4 - 3,46 \approx 0,54$.

   La proportion de plaque non utilisée est $\dfrac{\text{MB}}{\text{AB}} \approx 0,14$ au centième près.

3. Comme dans un triangle la somme des angles est égale à 180, on a dans AMD, un angle de 90 en A, un angle de 60 en D et un angle de 30 en M.

   Dans le triangle DPN rectangle en P, on a donc un angle de 90 en P. De plus, son angle en D mesure $90 - 60$, soit 30.

   Le triangle DPN ayant deux angles de 90 et 30 comme le triangle ADM, ces deux triangles sont semblables.

   Dans le triangle MPN rectangle en P, on a donc un angle de 90 en P. De plus, son angle en M mesure $90 - 30$, soit 60.

   Le triangle MPN ayant deux angles de 90 et 60 comme le triangle ADM, ces deux triangles sont semblables.

   Les trois triangles AMD, PNM et PDN sont semblables.

   Deux triangles sont semblables si deux angles de l'un des triangles ont les mêmes mesures que deux angles de l'autre triangle.

4. Les triangles DNP et ADM sont semblables.

   Le rapport d'agrandissement pour passer de DNP à ADM est par exemple, le rapport $\dfrac{\text{DM}}{\text{DN}}$ des hypoténuses.

On a DN = AM $\approx 3,46$.

Dans ADM rectangle en A, on a $\cos \widehat{\text{ADM}} = \dfrac{\text{AD}}{\text{DM}}$, soit $\cos 60 = \dfrac{2}{\text{DM}}$.

On a donc $\cos 60 \times \text{DM} = 2$, soit $\text{DM} = \dfrac{2}{\cos 60}$.

On a $\text{DM} = 4$. Le rapport d'agrandissement est $\dfrac{4}{3,46}$, soit environ $1,16$.

Il est donc inférieur à $1,5$.